Gravitation

Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie

von
Ulrich E Schröder

überarbeitet

Harri Deutsch 2004

Verlag C.H. Beck im Internet:
www.beck.de
ISBN 978 3 8171 1727 7

Vorwort

Das vorliegende Buch ist aus Vorlesungen entstanden, die ich wiederholt an der Universität Frankfurt am Main gehalten habe. Diese richteten sich als Ergänzung zu den Kursvorlesungen in Theoretischer Physik an Studierende der Physik, Astrophysik und Mathematik nach dem Vorexamen. Vorkenntnisse in Spezieller Relativitätstheorie werden also vorausgesetzt.
Das Buch enthält den Stoff, der in einer zweistündigen Vorlesung während eines Semesters behandelt wurde. Die Darstellung ist jedoch ausführlicher als in der Vorlesung. Das Buch kann daher auch zum Selbststudium benutzt werden und soll an die speziellere und ausführlichere Fachliteratur heranführen. Dem begrenzten Stoffumfang entsprechend, sind die Ausführungen auf die wesentlichen Apsekte der relativistischen Gravitationstheorie beschränkt, so daß man das Buch, im Unterschied zu den umfangreicheren Monographien, in relativ kurzer Zeit lesen kann. Dabei wird aber auch wiederholt die aktive Beteiligung des Lesers mit Papier und Bleistift gefordert. Anreiz hierzu sollen die auf den Text bezogenen Übungsaufgaben im Anhang A bieten.
In der Einleitung werden vorbereitend die Grenzen der Speziellen Relativitätstheorie aufgezeigt und die grundlegenden Eigenschaften einer relativistischen Gravitationstheorie in knapper Form dargelegt. Zur Einstimmung auf die Theorie gehören auch die Ausführungen über die ebenso interessante wie lehrreiche historische Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie in Kapitel 2. Im Anschluß an die nun folgende Diskussion der physikalischen Grundlagen der Gravitationstheorie wird der Bezug zur nichteuklidischen Geometrie des Raum-Zeit-Kontinuums anschaulich erläutert. Nach dieser verbalen Darlegung des Zusammenhangs von Gravitation und Geometrie im Riemannschen Raum werden in Kapitel 4 die zur mathematischen Formulierung der Theorie erforderlichen differentialgeometrischen Begriffe eingeführt. Hierbei diente als Vorbild das in dem vorzüglichen Buch „Space-Time Structure“ von Erwin Schrödinger verfolgte Konzept, die Riemannsche Maßbestimmung erst spät einzuführen. Ausgehend von möglichst schwachen Annahmen über die Raum-Zeit-Struktur werden also zunächst die allgemeinen Eigenschaften differenzierbarer Mannigfaltigkeiten diskutiert und der in der Physik wichtige Begriff der Vektorfeldes (bzw. Tensorfeldes) erklärt. Führt man nun den affinen Zusammenhang als zusätzliche Struktur ein, dann rücken die folgenden Begriffe in den Vordergrund des Interesses: die Vektorübertragung, die kovariante Ableitung, autoparallele Kurven sowie der Torsions- und Krümmungstensor. Da sie unabhängig von der metrischen Struktur sind, werden sie hier vor Einführung einer Metrik behandelt. In diesem allgemeiner gefaßten Rahmen tritt der Unterschied zwischen rein

differentialgeometrischen Begriffen und und den später eingeführten physikalisch bedeutsamen Größen klarer hervor. Die Einführung der Metrik als weitere Struktur in Kapitel 5 leitet dann den Übergang von der Differentialgeometrie zur Gravitationstheorie ein, der in Kapitel 6 mit der Diskussion der physikalischen Grundgesetze in der Riemannschen Raum-Zeit vollzogen wird. Die Einsteinschen Feldgleichungen folgen dann in Kapitel 7 nahezu zwangsläufig aus wenigen plausiblen Annahmen und werden, ihrer grundlegenden Bedeutung entsprechend, auch als Euler-Lagrange-Gleichungen aus einem Variationsprinzip hergeleitet. Es folgt in Kapitel 8 die Diskussion der für die Anwendungen besonders wichtigen kugelsymmetrischen Lösung der Feldgleichungen, die dann im Kapitel 9 bei der Überprüfung der Theorie im Sonnensystem Verwendung findet. In dem abschließenden Kapitel über Gravitationswellen wird ein besonders interessantes und aktuelles Problem behandelt, denn es besteht die berechtigte Hoffnung, daß die derzeitigen weltweiten Bemühungen in naher Zukunft zu einem direkten Nachweis von Gravitationswellen führen werden.

Die Berücksichtigung weiterer interessanter Themen wären über den gestellten Rahmen dieser Einführung zu weit hinausgegangen. So mußte es bei der hier subjektiv getroffenen Auswahl bleiben. Hinsichtlich weiterer Einzelheiten über den Inhalt des Buches sei auf das Inhaltsverzeichnis hingewiesen.

Für die Durchsicht der ersten beiden Kapitel und die nützlichen Bemerkungen hierzu möchte ich Herrn Professor Friedrich W. Hehl (Köln) herzlich danken. Ebenso danke ich Herrn Dr. Helmut Rechenberg (München) für seine ausführliche Stellungnahme zur Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie, insbesondere hinsichtlich der Verbindung zwischen Einstein und Hilbert und ihrer unterschiedlichen Beiträge im entscheidenden Jahr 1915. Außerdem gilt mein besonderer Dank Herrn Dr. Rudolf Staudt (Augsburg) für die geduldige und sachkundige Herstellung der für den Druck fertigen Vorlage des Manuskripts.

Von der Allgemeinen Relativitätstheorie geht wegen der engen Verknüpfung von Physik und Geometrie ein besonderer ästhetischer Reiz aus. Sie fasziniert durch ihre logische Geschlossenheit und Schönheit. Neben grundlegenden Einsichten eröffnet sie einen weiten Bereich interessanter Anwendungen. Wenn es gelingt, hiervon einen ersten Eindruck zu vermitteln und das Interesse an diesem weiterhin wichtigen Forschungsgebiet der Physik zu fördern, dann ist ein wesentliches Ziel des Buches erreicht. Möge es viele Freunde gewinnen.

Oldendorf, im Oktober 2000 Ulrich E. Schröder

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie gehen wir davon aus, daß die Grundtatsachen der Speziellen Relativitätstheorie bekannt sind; einschließlich der entsprechenden mathematischen Methode, der Tensoranalysis im Minkowski-Raum.
Beim Studium der Speziellen Relativitätstheorie sollte deutlich geworden sein, daß der Name Relativitätstheorie keine glückliche Bezeichnung darstellt, sondern den wesentlichen Inhalt der Theorie in eher negativer Weise umschreibt. In ihrer historischen Entwicklung wurde mit dem Relativitätsprinzip der Begriff des absolut ruhenden Äthers zurückgewiesen.
Die entscheidende Aussage der Speziellen Relativitätstheorie ist die Invarianz (Kovarianz) der Naturgesetze gegenüber dem Wechsel von Inertialsystemen gemäß den Transformationen der Poincaré-Gruppe. Damit wird geklärt, in welchem Sinn absolute, d.h. vom inertialen Bezugssystem unabhängige, physikalische Aussagen überhaupt möglich sind. Die mathematische Struktur der physikalischen Gesetze ist dadurch in der Form von Tensorgleichungen festgelegt.
Der Grund für das Attribut „spezielle“ und die damit verbundene Einschränkung ist häufig mißverstanden worden. Diese Einschränkung besagt, daß die Spezielle Relativitätstheorie nur in solchen Fällen gilt, in denen keine Gravitationseffekte auftreten. Die gelegentlich anzutreffende Behauptung, daß die Spezielle Relativitätstheorie nur bei Bewegungen ohne Beschleunigungen (sogenannte Trägheitsbewegungen) anzuwenden sei, ist unzutreffend. Man führt den Vierervektor des Impulses ein und kann die beschleunigte Bewegung eines Teilchens unter der Wirkung einer äußeren Kraft (Minkowski-Kraft) beschreiben. Es sei z. B. an die von der Elektrodynamik her bekannte Bewegungsgleichung einer Ladung e im äußeren elektromagnetischen Feld $F_{\mu\nu}$ erinnert,

$$\frac{\mathrm{d}p_\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \quad . \tag{1.1}$$

Hier bezeichnen p_μ und u^ν die Vierervektoren des Impulses bzw. der Geschwindigkeit, τ die Eigenzeit und c die Lichtgeschwindigkeit.
Andererseits zeigt sich der Konflikt des Newtonschen Gravitationsgesetzes

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r} \quad , G = 6.67 \times 10^{-8}\mathrm{cm}^3\mathrm{g}^{-1}\mathrm{s}^{-2} \tag{1.2}$$

mit der Speziellen Relativitätstheorie in verschiedener Weise. Diese Relation ist kovariant gegenüber der Gruppe der räumlichen Drehungen, die den Abstand $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ invariant läßt, und gegenüber der Galilei-Transformation $t = t'$, $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$. Dies trifft auch für die entsprechende Potentialgleichung zu

$$\vec{\nabla}^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \varrho(\vec{r}) \quad , \tag{1.3}$$

wobei ϕ das Gravitationspotential einer Materieverteilung der Dichte ϱ ist. Ausgehend von der Masse M als der im Ursprung ($\vec{r} = 0$) gelegenen Quelle des Gravitationsfeldes, führt die Lösung der Potentialgleichung $\phi = -GM/r$ gemäß der Definition $\vec{F} = -m\vec{\nabla}\phi$ auf das Gravitationsgesetz (1.2).
In der Speziellen Relativitätstheorie wird die grundlegende Symmetrie durch die Lorentz-Gruppe beschrieben, die $s^2 = ct^2 - x^2 - y^2 - z^2$ invariant läßt. Die Relationen (1.2) und (1.3) sind jedoch nicht kovariant gegenüber der Lorentz-Gruppe.
Physikalisch bedeutet dies, daß in der Newtonschen Theorie die Lichtgeschwindigkeit keine invariante Größe ist und ihr auch nicht die Bedeutung einer Grenzgeschwindigkeit zukommt. Die Gravitation wirkt hier instantan, d.h. ihre Wirkung breitet sich mit unendlicher Geschwindigkeit aus (Fernwirkungstheorie). Hat man zur Vermeidung dieses Konflikts das Newtonsche Gravitationsgesetz aufzugeben oder möglicherweise so zu modifizieren, daß es mit der Speziellen Relativitätstheorie verträglich wird?

Grenzen der Speziellen Relativitätstheorie

Die einfachste speziell-relativistische Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung (1.3) führt auf die Wellengleichung

$$\Box\phi = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\right)\phi = -4\pi G \varrho \tag{1.4}$$

und würde somit die Ausbreitung entsprechender Störungen der Gravitation mit Lichtgeschwindigkeit enthalten. Durch einen solchen Ansatz entstehen aber andere Schwierigkeiten. Mit ϕ als skalarem Feld muß auch ϱ ein Skalar sein. Andererseits erwartet man wegen der Äquivalenz von Masse und Energie ($E = mc^2$), daß jede Energiedichte ebenso wie die Massendichte Quelle des Gravitationspotentials sein sollte. Die Energiedichte ist aber keine skalare Größe, sondern die Komponente T^{00} des Energie-Impuls-Tensors. Wollte man nun die zur Energiedichte des elektromagnetischen Strahlungsfeldes äquivalente Masse in der Gleichung (1.4) berücksichtigen, hätte man auf der rechten Seite die skalare Größe $g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}/c^2$ für die Massendichte einzusetzen. Man überzeugt sich aber leicht, daß dieser Ausdruck, d.h. die Spur des Energie-Impuls-Tensors, im Falle des elektromagnetischen Strahlungsfeldes Null ergibt. Da die Photonen keine Ruhmasse besitzen, ist eine andere Kopplung des Gravitationsfeldes (hier ϕ) an das Strahlungsfeld nicht möglich. Das heißt, in dieser skalaren Theorie kann ein Lichtstrahl durch das Gravitationsfeld nicht abgelenkt werden. Dies widerspricht jedoch den Beobachtungen. Aus diesen Überlegungen folgt, daß in einer relativistischen Theorie die Gravitationserscheinungen nicht durch ein skalares Feld beschrieben werden können.

Somit liegt es nahe, bei einem weiteren Versuch statt eines skalaren Feldes ein symmetrisches Tensorfeld $\phi_{\mu\nu} = \phi_{\nu\mu}$ einzuführen. An die Stelle der Gleichung (1.4) tritt dann (bei Wahl der Eichung $\partial_\mu \phi^{\mu\nu} = 0$)

$$\Box\phi_{\mu\nu} = -4\pi G T_{\mu\nu} \quad , \tag{1.5}$$

wobei $T_{\mu\nu}$ den Energie-Impuls-Tensor bezeichnet. In dieser tensoriellen Theorie kann zwar die Lichtablenkung korrekt beschrieben werden, doch für die Perihelverschiebung wird ein Wert vorhergesagt, der mit den Beobachtungen am Planeten Merkur nicht übereinstimmt. Außerdem stellt sich heraus, daß dieser Ansatz nicht selbstkonsistent ist, denn einerseits wird $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ gefordert, andererseits wäre dies aber auszuschließen.[1]

Abgesehen von diesen Schwierigkeiten ist festzustellen, daß die Gleichung (1.5) auf der linken Seite den linearen Differentialoperator der Wellengleichung enthält, die das Newtonschen Gesetz verallgemeinernde relativistische Gravitationstheorie aber nichtlinear sein muß. Um dies zu sehen, sei an die Äquivalenz von Masse und Energie erinnert. Das von einer Massenverteilung erzeugte Gravitationsfeld besitzt demnach eine bestimmte Energiedichte, die einer Massendichte äquivalent ist. Diese Massendichte stellt ihrerseits eine Quelle von Gravitation dar und trägt zum Gravitationsfeld bei. Daher ist die relativistische Gravitationstheorie eine nichtlineare Theorie und die entsprechenden Feldgleichungen müssen komplexer sein als der einfache lineare Ansatz (1.5).

Bei dem Versuch, das Newtonsche Gravitationsgesetz relativistisch zu verallgemeinern, erweist sich also der Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie als zu eng. Dies erkennt man auch daran, daß die Gravitationserscheinungen mit dem in der Speziellen Relativitätstheorie grundlegenden Begriff des globalen Inertialsystems unverträglich sind. Bei der Formulierung der relativistischen Mechanik wird das Newtonsche Trägheitsgesetz benutzt und somit der Begriff des inertialen Bezugssystems eingeführt. In einem Inertialsystem bewegt sich ein kräftefreier Körper mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden, oder er ruht. Zu einer Prüfung des Trägheitsgesetzes ist demnach ein Probekörper erforderlich, auf den keine Kräfte einwirken. Nun ist es zwar möglich, Materie gegenüber der elektromagnetischen Wechselwirkung abzuschirmen, doch die Wirkung der Gravitation kann prinzipiell global (oder auch nur in größeren Bereichen) nicht kompensiert werden. Wenn ein Körper frei fällt, wird die Gravitationswirkung lokal an diesem Ort aufgehoben.[2] Was jedoch nicht kompensiert werden kann, ist die Inhomogenität des Gravitationsfeldes, die zu einer relativen Beschleunigung benachbarter Körper führt. So ist z.B. von einem Labor aus gesehen, das am Nullmeridian in Greenwich frei fällt und dort ein Inertialsystem darstellt, ein über Hamburg fallendes Labor nicht beschleunigungsfrei. Da Hamburg bei etwa 10° östlicher Länge liegt, bildet die Richtung der Erdbeschleunigung g in Hamburg einen Winkel von 10° mit derjenigen am Nullmeridian. Dies entspricht einer relativen Beschleunigung, die zur Annäherung der beiden frei fallenden Systeme führt.

[1] Näheres dazu findet man in Ch.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler: Gravitation, W.H. Freeman & Co., San Francisco 1973, S. 186.

[2] Hierauf beruht das Phänomen der Schwerelosigkeit in Raumschiffen.

Als weiteres Beispiel für die Wirkung der nicht zu kompensierenden Inhomogenität des Gravitationsfeldes kann die Entstehung der Gezeiten dienen. Bei ihrem Umlauf um die Sonne befindet sich die Erde im Zustand einer permanenten freien Fallbewegung. Das Gravitationsfeld der Sonne ist auf den gegenüberliegenden Seiten der Erde (der Tag- und Nachtseite) nicht gleich stark, wodurch die Sonnengezeiten auf der Erde verursacht werden. Entsprechendes gilt für die Mondgezeiten.
Wollte man die Wirkung der Gravitation vermeiden, müßten die Experimente dort stattfinden, wo es kein Gravitationsfeld, keine gravitierende Materie gibt. Dies wäre aber aus praktischen Gründen kaum zu realisieren und außerdem auch problematisch. Schließlich enthält das Universum Materie in vielfältigen Formen, so daß ihr Einfluß prinzipiell nicht zu vermeiden sein dürfte. So gesehen ist das globale Inertialsystem der Speziellen Relativitätstheorie ein sehr idealisierter Begriff. Die Experimente werden auf der Erde, d.h. in der Nähe gravitierender Materie durchgeführt, und auch die astrophysikalischen Beobachtungen resultieren aus Vorgängen, die sich zwar in großen Entfernungen von uns, aber doch am Entstehungsort in unmittelbarer Nähe großer Massen (Sterne, Sternsysteme, usw.) ereignen.

Lokale Inertialsysteme

In der Umgebung von Massen kann, wie wir gesehen haben, wegen der stets vorhandenen Inhomogenität des Gravitationsfeldes nur lokal ein Inertialsystem realisiert werden. So stellt ein Satellit, der im freien Fall die Erde umkreist, nicht rotiert, dessen Triebwerke abgeschaltet sind, in guter Näherung ein lokales Inertialsystem dar. In diesem frei fallenden Labor kann festgestellt werden, ob das Trägheitsgesetz dort gilt.
Zur Veranschaulichung der Situation betrachten wir zwei verschieden große Satelliten (ohne Eigenrotation und ohne zusätzliche Schubkraft), die in unterschiedlicher Entfernung die Erde umkreisen. In dieser Situation ist im Schwerpunkt der Satelliten die Gravitationsanziehung entgegengesetzt gleich der Zentrifugalkraft. Auf der zur Erde näher gelegenen Seite des Satelliten ist die Gravitationsanziehung jedoch stärker und die Zentrifugalkraft schwächer. Auf der weiter entfernten Seite ist es gerade umgekehrt. Im Fall des großen Satelliten bedeutet dies, daß die unterhalb des Schwerpunktes befindlichen Körper auf die Erde zu, diejenigen oberhalb des Schwerpunktes in entgegengesetzter Richtung beschleunigt werden. Der von dem großen Satelliten eingenommene Raum stellt somit insgesamt kein Inertialsystem dar. Im Unterschied dazu kann die Ausdehnung des kleinen Satelliten so bemessen sein, daß innerhalb der erreichbaren Meßgenauigkeit das Gravitationsfeld als homogen und damit der Satellit als ein Inertialsystem in dem begrenzten Bereich angenommen werden kann. Da jede Inhomogenität im Prinzip feststellbar ist, kann ein Bezugssystem genau genommen nur in einem verschwindend kleinen Bereich, mathematisch ausgedrückt in einem Punkt, als inertial angesehen werden.

Verallgemeinerte Trägheitsbewegung

Bei Einbeziehung der Gravitation kommt offenbar dem Begriff des Inertialsystems nicht mehr die ausgezeichnete Stellung zu wie in der Speziellen Relativitätstheorie. Nach den vorigen Ausführungen wird aber auch deutlich, daß in jeder Theorie der Gravitation lokale Inertialsysteme als Grenzfall zugelassen sein sollten. Bei der Formulierung einer relativistischen Gravitationstheorie, der Allgemeinen Relativitätstheorie, liegt nun folgender Gedanke als nützlicher Ausgangspunkt nahe, der auf Albert Einstein zurückgeht. Da die Gravitationswirkungen nicht abgeschirmt und somit die gemäß dem Trägheitsgesetz definierten Inertialsysteme nur lokal eingeführt werden können, gehe man davon aus, daß Gravitation und Trägheit nicht getrennt zu betrachten sind, sondern im Grunde zusammengehören. Die Wirkungen, die beide Phänomene auf einen Körper ausüben, sind schließlich gleich: die auftretenden Kräfte sind in jedem Falle (Gravitationskräfte, Inertialkräfte) proportional zur Masse des Körpers. Dementsprechend ist es sinnvoll, von dem Trägheitsgesetz in einer allgemeinen Formulierung auszugehen. Hiernach gibt es eine allgemeine Standardbewegung, und wenn ein Körper dieser Standardbewegung folgt, wirken keine Kräfte auf ihn. In dem speziellen Fall eines Inertialsystems ist diese Standardbewegung dann die Bewegung auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit. Die Standardbewegung[3] (verallgemeinerte Trägheitsbewegung) ist hiernach jede Bewegung, die nur durch Trägheit und Gravitation, die beide allen Körpern eigen sind, hervorgerufen wird, wie z.B. bei der Bewegung im freien Fall und bei der Bewegung der Erde (im freien Fall) um die Sonne. Zusätzliche Kräfte sind dann als diejenigen Kräfte definiert, die den Körper von seiner Standardbewegung abbringen. Gravitation und Trägheit bilden sozusagen den Hintergrund, vor dem sich alle übrigen Bewegungen unter dem Einfluß anderer Kräfte abspielen.

Eigenschaften der relativistischen Gravitationstheorie

Als unaufhebbarer Bestandteil des Gravitationsfeldes bewirken seine Inhomogenitäten eine relative Beschleunigung benachbarter Körper. Diesen wesentlichen Effekt muß die zu formulierende relativistische Gravitationstheorie beschreiben. Bei Vernachlässigung der relativen Beschleunigung (d.h. der Inhomogenitäten des Feldes) sollte sie in die Spezielle Relativitätstheorie übergehen. Sowohl diese Forderungen als auch die Konzeption der verallgemeinerten kräftefreien Bewegung sind in der von Albert Einstein entwickelten Allgemeinen Relativitätstheorie realisiert. Diese Theorie hat folgende Eigenschaften:

1. Sie ist relativistisch, d.h. sie ergibt lokal, bei möglicher Vernachlässigung der Inhomogenitäten auch in kleinen Bereichen, die Spezielle Relativitätstheorie, deren Gültigkeit experimentell sehr genau überprüft ist.

2. Sie ergibt in großen Bereichen, dort wo schwache Gravitationsfelder vorhanden

[3] Die Standardbewegungen sind durchaus komplizierter als die Bewegungen auf einer Geraden mit konstanter Geschwindigkeit. Sie werden mathematisch durch die Geodäten in einer gekrümmten Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit (einem Riemannschen Raum) beschrieben. Wir werden später darauf zurückkommen.

sind, in guter Näherung die Newtonsche Gravitationstheorie, die sich bei der Beschreibung der Bewegungen im Sonnensystem bewährt hat. Die geringen Abweichungen von den Voraussagen der Newtonschen Theorie, die innerhalb des Sonnensystems festzustellen sind, bestätigen die Allgemeine Relativitätstheorie.

3. Sie bezieht als relativistische Theorie jede Form von Energie in die Gravitation ein, insbesondere enthält sie die Wechselwirkung zwischen Gravitationsfeld und elektromagnetischen Feldern (Licht). Die Newtonsche Theorie erlaubt hingegen ohne Zusatzannahmen keine Aussagen über das Verhalten von Licht im Gravitationsfeld.

Bei der Formulierung dieser Theorie ist eine allgemeinere (und kompliziertere) mathematische Methode einzuführen als die in der Mechanik und Elektrodynamik verwendete Vektoranalysis im Minkowski-Raum. Dies wird am Beispiel der beiden Erdsatelliten deutlich. Wenn sie in ungleichen Abständen die Erde umkreisen, haben sie verschiedene Umlaufperioden und sind gegenseitig beschleunigt. Das bedeutet, auch wenn sie zeitweilig nahe genug beieinander sind, können wir die beiden Satelliten nicht zu einem einzigen zusammenfügen und somit auch nicht erwarten, daß es eine Lorentz-Transformation gibt, die ihre lokalen Inertialsysteme ineinander überführt. Da die Lorentz-Transformation, die ja linear ist, hier nicht in Betracht kommt, wird die Relation zwischen den Inertialsystemen, die bezüglich verschiedener Raum-Zeit-Punkte definiert sind, allgemeiner als ein linearer Zusammenhang, d.h. nichtlinear sein, wie es auch aufgrund der relativen Beschleunigung der Systeme zu erwarten ist. Diese Relation wird durch die einzige hier in Frage kommende Ursache bestimmt, durch die Massenverteilung, in deren Gravitationsfeld die Inertialsysteme sich bewegen. In unserem Beispiel stellt die Erde die Massenverteilung dar und die sie umkreisenden Satelliten die Inertialsysteme. Beim Versuch einer globalen Beschreibung des Gravitationsfeldes muß man demnach bereit sein, nichtlineare Koordinatentransformationen zuzulassen, d.h. auch allgemeine krummlinige Koordinaten einzuführen, die nicht global in die geradlinigen Koordinaten des Minkowski-Raumes übergeführt werden können.

Gravitation und Geometrie

Man erkennt hier die Verhältnisse wieder, wie sie in gekrümmten Räumen anzutreffen sind. Denn auch hier ist es nicht möglich, global ein starres euklidisches Koordinatensystem einzuführen. So würden z.B. im Fall der Oberfläche einer Kugel die Koordinatenlinien aus den Räumen (d.h. der Kugeloberfläche) herausragen. Zum besseren Verständnis ist es nützlich, den Vergleich mit einer gekrümmten Fläche weiter zu verfolgen. In kleinen Bereichen, die durch Flächenelemente dargestellt werden, gilt auf einer gekrümmten Fläche in guter Näherung die Geometrie der Ebene, d.h. des flachen Raumes. Die Flächenelemente lassen sich aber nicht zu einer großen Ebene vereinen, sondern stehen in komplizierter Relation zueinander, die durch die Krümmung der Fläche bestimmt wird. Die Krümmung der Fläche entspricht also gerade dem Einfluß der Masse in der Allgemeinen Relativitätstheorie und die Flächenelemente repräsentieren die Inertialsysteme.

Dieser Vergleich ist durchaus von größerer Bedeutung als es zunächst erscheinen mag. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird die Wirkung der Gravitation eine Eigenschaft des gekrümmten Raum-Zeit-Kontinuums und damit geometrisiert. Man bezeichnet die Einsteinsche Gravitationstheorie daher zutreffend auch als Geometrodynamik. Die geometrische Struktur der Raum-Zeit entspricht der eines Riemannschen Raumes. Seine Metrik $g_{\mu\nu}(x)$, die das Gravitationsfeld repräsentiert, wird durch die Massen- und Energieverteilung bestimmt. Die kräftefreie Bewegung der Massen im Gravitationsfeld erfolgt dann auf Geodäten in der gemäß der Materie gekrümmten Raum-Zeit (Standardbewegung). Aus mathematischer Sicht stellen die vorher erwähnten lokalen Inertialsysteme die ebenen Tangentialräume des Riemannschen Raumes in den jeweiligen Punkten dar. Die Anwendung der Lorentz-Transformation ist auf diese Räume beschränkt, während im allgemeinen Fall nichtlineare Transformationen erforderlich sind. In der Allgemeinen Relativitätstheorie sind Trägheit, Metrik und Gravitation vereinigt. Raum und Zeit haben keine unabhängige und damit absolute Existenz, sondern sind aufs engste verknüpft mit den materiellen Objekten, die den Raum erfüllen.

Stellung innerhalb der Physik

Hiernach ist es verständlich, daß die Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie von einer entwickelten Mathematik gekrümmter, d.h. nichteuklidischer Räume abhängig war. Die hier anzuwendenden Methoden sind durchaus verschieden von der Tensoranalysis im Minkowski-Raum, die in der Speziellen Relativitätstheorie, bei der Formulierung der Elektrodynamik und anderer Feldtheorien benutzt wird. So konnte es dazu kommen, daß die Allgemeine Relativitätstheorie nach ihrer Entstehung zunächst für mehrere Jahrzehnte von den anderen Gebieten der Physik etwas separiert war. Ein weiterer Grund hierfür liegt sicher auch in dem zeitweilig fehlenden Fortschritt bei ihrer Anwendung und experimentellen Prüfung.
In neuerer Zeit hat sich diese Situation jedoch völlig verändert, so daß die Gravitationstheorie mit ihren Anwendungen heute ein besonders interessantes und aktuelles Forschungsgebiet innerhalb der Physik darstellt. Zu dieser Entwicklung haben die verfeinerten Techniken bei Präzisionsexperimenten (Mößbauer-Effekt, Radar-Technik, etc.), der Einsatz von Raumsonden (Satelliten), sowie neue astrophysikalische Entdeckungen (Neutronensterne, Pulsare, Quasare) beigetragen. Außerdem bildet die Einsteinsche Gravitationstheorie den Rahmen für die Formulierung relativistischer kosmologischer Modelle. Auf diesem Gebiet haben sich in neuerer Zeit interessante Zusammenhänge mit den Erkenntnissen in der Physik der Elementarteilchen ergeben. Diese symbiotische Beziehung zweier scheinbar getrennter Gebiete eröffnet neue unerwartete Einsichten und dürfte auch für die weitere Entwicklung unserer Vorstellung über die Entstehung der „Welt im Großen“ und ihre Beschaffenheit „im Kleinen“ von großer Bedeutung sein.
Die fundamentalen Wechselwirkungen der Elementarteilchen werden durch Eichfeldtheorien beschrieben, die in ihrer Struktur große formale Ähnlichkeiten mit der Allgemeinen Relativitätstheorie haben, d.h. letztere kann auch als Eichfeldtheorie formuliert werden. Von besonderem Interesse in der aktuellen Forschung sind derzeit die Bestre-

bungen, alle fundamentalen Wechselwirkungen unter Einbeziehung der Gravitation in einer vereinheitlichten Theorie zusammenzufassen. Die dabei auftretende Frage nach der Quantisierung des Gravitationsfeldes, mit Gravitonen als dem entsprechenden Feldquant (Spin 2), führt auf Probleme, die noch zu lösen sind.

Kapitel 2

Zur historischen Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie

Die Zeit um 1905 war reif für die Aufstellung der Speziellen Relativitätstheorie. So konnte Albert Einstein (1879-1955) die damit zusammenhängenden Probleme in seiner berühmten Arbeit „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ (Ann. d. Physik **17**, 891 (1905)) lösen. Man darf zur Situation um das Jahr 1905 zusammenfassend feststellen: Den Anfang der Speziellen Relativitätstheorie machte H.A. Lorentz (1853-1928), die physikalische Grundlage und den physikalischen Gehalt zeigte A. Einstein, die mathematische Struktur ist bei H. Poincaré (1854-1912) am klarsten. Dagegen ist die Allgemeine Relativitätstheorie, wie wohl keine andere große physikalische Theorie, das Werk eines einzelnen Menschen.

Einsteins Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Der Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie war schwierig und bedurfte der Anstrengungen vieler Jahre. Den Arbeiten Albert Einsteins aus jenen Jahren ist zu entnehmen, wie mühsam die Allgemeine Relativitätstheorie, für die es nur ganz wenige Indizien gab, herausgearbeitet werden mußte. Einstein war sich der Grenzen der von ihm formulierten Speziellen Relativitätstheorie durchaus bewußt. Die folgenden Mängel dieser Theorie waren zu überwinden: Die Beschränkung auf Inertialsysteme und auf die damit verbundenen Galilei-Koordinaten, sowie die Nichteinbeziehung der Gravitation.
Warum sollte irgendein Bezugssystem, das Inertialsystem der Speziellen Relativitätstheorie, vor anderen (beliebigen) Bezugssystemen ausgezeichnet sein? Die Naturgesetze sollen sich so formulieren lassen, daß sie in allen Bezugssystemen gelten, unabhängig vom Bewegungszustand der Bezugssysteme. Es müßte möglich sein, die Gruppe der gleichmäßig gegeneinander bewegten Bezugssysteme auf die Gruppe aller möglichen Bezugssysteme zu erweitern. Dieses Ziel, das Einstein sich selbst stellte, nannte er das „allgemeine Relativitätsprinzip“. Er wußte zunächst nicht, wie dieses Problem zu lösen war und wie die Lösung ausfallen würde. Der Durchbruch zur Lösung gelang erst 1915. An dieses Prinzip knüpft die historische Bezeichnung „Allgemeine Relativitätstheorie“ an. Dem Inhalt nach ist die Einsteinsche Theorie eine relativistische

Theorie der Gravitation, in der die Gravitationsquellen die Geometrie des Raum-Zeit-Kontinuums bestimmen. Daher wäre die Bezeichnung „Geometrodynamik“ durchaus zutreffender.
Das Konzept allgemeiner (d.h. beschleunigter) Bezugssysteme ist im Ansatz bereits im letzten Teil einer längeren Arbeit aus dem Jahre 1907 enthalten, in der Einstein einen systematischen Überblick über die Spezielle Relativitätstheorie gibt.[1] In dieser Arbeit führt er auch das sogenannte „Äquivalenzprinzip“ ein. Hiernach kann man physikalisch nicht unterscheiden zwischen Bezugssystemen, die sich in einem homogenen und stationären Gravitationsfeld befinden und solchen ohne Gravitation, aber mit entsprechender (d.h. hinsichtlich Stärke und Richtung) konstanter Beschleunigung. Durch diese Hypothese wird klar, warum träge und schwere Masse unter allen Umständen zueinander proportional sein müssen. Entsprechend ist die Äquivalenz von Energie und träger Masse ($E = mc^2$) auf die schwere Masse zu verallgemeinern.
Einstein nannte das Äquivalenzprinzip „den glücklichsten Gedanken meines Lebens“. Dies äußerte er in einer Arbeit 1920[2], die für die Zeitschrift *Nature* bestimmt war, wegen Überlänge jedoch durch eine kürzere Version ersetzt werden mußte.[3] Das Manuskript in der ursprünglichen Fassung blieb jedoch erhalten und ist eine interessantes Dokument, in dem der Autor nicht nur seine Gedanken darlegt, sondern auch seine Empfindungen mitteilt.[4]
Die Gleichheit von träger und schwerer Masse, auf der das Äquivalenzprinzip beruht, war im Rahmen der Newtonschen Mechanik eine empirische Tatsache, die im Hintergrund blieb und als zufällig angesehen wurde. Aber Einstein erkannte darin ein grundlegendes Prinizip der Natur und forderte für das von ihm formulierte Äquivalenzprinzip universelle Gültigkeit.
Mit Hilfe des Äquivalenzprinzips konnte Einstein den Einfluß der Gravitation auf physikalische Phänomene ermitteln, denn hiernach brauchte man nur das betreffende Phänomen von einem beschleunigten Bezugssystem aus zu betrachten. Er erhielt so bereits in der Arbeit von 1907 das Ergebnis, daß Uhren in starken Gravitationsfeldern langsamer gehen als in der Umgebung von schwächeren Gravitationsfeldern. Dies muß zu einer Rotverschiebung des im Gravitationsfeld der Sonne aufsteigenden Sonnenlichts führen. Auch werden Lichtstrahlen, die nahe an der Sonne vorbeigehen, durch das Gravitationsfeld der Sonne abgelenkt.[5]
In den folgenden dreieinhalb Jahren schweigt Einstein zum Thema der Gravitation, obwohl er Arbeiten über Themen der Speziellen Relativitätstheorie und vor allem über

[1] A. Einstein: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen, Jahrb. d. Radioaktivität u. Elektronik **4**, 411 (1907).

[2] A. Einstein: Grundgedanken und Methoden der Relativitätstheorie in ihrer Entwicklung dargestellt, 1920. Es ist zu erwarten, daß dieses bisher unveröffentlichte Manuskript noch publiziert wird in „The Collected Papers of Albert Einstein“, Princeton 1987 ff..

[3] A. Einstein: A brief outline of the development of the theory of relativity, Nature **106**, 782 (1921).

[4] Weitere sehr aufschlußreiche Äußerungen Einsteins über seine Ideen bei der Entwicklung der Relativitätstheorie findet man in seinem in der Universität von Kyoto, Japan, 1922 gehaltenen Vortrag, dessen Mitschrift von Y.A. Ono ins Englische übertragen wurde: How I created the Theory of Relativity, Physics Today, August 1982, S. 45.

[5] Hinsichtlich näherer Einzelheiten hierzu siehe Abschnitt 9.3.

quantenmechanische Probleme der Strahlung publiziert. Offenbar stand für Einstein in dieser Zeit (1908-1911) nicht die Gravitation, sondern die Quantentheorie im Vordergrund des Interesses. Dies ist insbesondere aus seinen Briefen zu entnehmen, die er damals an seine Freunde und andere Physiker geschrieben hat.[6]
Das Thema der Gravitation wird von Einstein 1911 wieder aufgenommen durch die Arbeit „Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes“ (Ann. d. Physik **35**, 898-908 (1911)). Diese Frage hatte er schon 1907 behandelt und kehrt nun dazu unter allgemeinerem Gesichtspunkt zurück. Nach dem Äquivalenzprinzip sind die beiden folgenden Situationen äquivalent:

- homogenes Gravitationsfeld, Beobachter in Ruhe;
- kein Gravitationsfeld, Beobachter in Bewegung mit konstanter Beschleunigung.

Wenn das Äquivalenzprinzip universelle Gültigkeit hat, dann sind träge und schwere Masse notwendigerweise gleich und somit gemäß $E = mc^2$ auch die träge und schwere Energie. In dieser Arbeit wird die Rotverschiebung und die Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld diskutiert. Die Lichtablenkung kam hier, wie sich später zeigte, zunächst mit einem um den Faktor zwei zu kleinen Wert heraus.
In den folgenden Jahren erscheint eine Reihe von Arbeiten Einsteins zur Gravitation. Sie sind ein beredtes Zeugnis seiner intensiven Bemühungen über auftretende Schwierigkeiten und Irrtümer hinweg endlich Klarheit zu gewinnen. Den logischen Abschluß seiner Theorie konnte Einstein schließlich am 25. November 1915 in einer Sitzung der Preußischen Akademie der Wissenschaften, deren Mitglied er seit 1913 war, in Berlin präsentieren. Die nur drei Seiten umfassende Arbeit enthält die richtige Form der Einsteinschen Gravitationstheorie.[7] In seiner späteren Publikation „Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie“ (Ann. d. Physik **49**, 769-822 (1916))[8], wird das Gesamtgebäude der Allgemeinen Relativitätstheorie in zusammenfassender Weise dargestellt. Man kann sie als den Höhepunkt des Einsteinschen Werkes ansehen. Wie Einstein bekannt hat, ist er „nach langen Irrwegen“ zur endgültigen Formulierung seiner Gravitationstheorie gelangt.
Jahre später erinnerte Einstein in einem Vortrag über die Entstehung der Allgemeinen Relativitätstheorie an die vorangegangene Zeit mühevoller Arbeit: „Im Lichte bereits erlangter Erkenntnis erscheint das glücklich Erreichte fast wie selbstverständlich, und jeder intelligente Student erfaßt es ohne zu große Mühe. Aber das ahnungsvolle Jahre währende Suchen im Dunkeln mit seiner gespannten Sehnsucht, seiner Abwechslung von Zuversicht und Ermattung und seinem endlichen Durchbrechen zur Wahrheit, das kennt nur, wer es selber erlebt hat.“[9]

[6]Nähere Einzelheiten dazu findet man in dem hervorragenden Buch von A. Pais: „Raffiniert ist der Herrgott ... “: Albert Einstein - Eine wissenschaftliche Biographie, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1986.
[7]A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.II, 1915, S. 844.
[8]Abgedruckt in dem Sammelband: Das Relativitätsprinzip, 1913, Neudruck Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1958.
[9]Zitat aus: A. Einstein, Mein Weltbild (Hrsg. C. Seelig), Frankfurt M. (Ullstein Buch Nr. 65), S. 138.

Entwicklung der Differentialgeometrie

Eine große Hilfe bei der Bewältigung mathematischer Probleme war für Einstein sein Freund Marcel Großmann (1878-1936), der ihn auf die Methode der Differentialgeometrie aufmerksam machte und ihn darin einführte. Die Anfänge der Differentialgeometrie gehen auf Carl Friedrich Gauß (1777-1855) zurück, der auch die Gültigkeit der euklidischen Geometrie für den realen physikalischen Raum anzweifelte. Er entwickelte die Theorie gekrümmter zweidimensionaler Flächen, wobei das Krümmungsmaß durch die inneren Eigenschaften der Fläche ausgedrückt wird. Gauß war auch der erste, der erkannt hatte, daß es eine nichteuklidische Geometrie gibt, bei der das Parallelenaxiom von Euklid nicht mehr gilt. Aber unabhängig voneinander hatten auch Janos Bólyai (1802-1860) und Nicolai Lobatschewski (1792-1856) die nichteuklidische (hyperbolische) Geometrie entwickelt. Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie stellt einen bedeutenden Wendepunkt in der Wissenschaftsgeschichte dar, denn damit wurde klar, daß seitens der Logik und Mathematik allein nicht zu entscheiden war, von welcher Art die Geometrie des realen physikalischen Raumes ist. Das Problem der wahren Geometrie konnte offenbar nur durch experimentelle Erfahrung gelöst werden.
Ausgehend von der Gaußschen Flächentheorie hat Bernhard Riemann (1826-1866) diese Lehre für Räume mit beliebiger Dimensionszahl verallgemeinert und damit auch die Grundlage für die Geometrie der vierdimensionalen Raum-Zeit geschaffen. Er untersuchte Mannigfaltigkeiten, in denen die Abstände durch die Maßbestimmung $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}(x)\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ definiert sind. In seinem berühmten Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ äußerte Riemann bereits 1854[10] die Vermutung, daß das metrische Feld nicht ein für allemal starr gegeben ist, sondern von der Verteilung der Materie abhängt und mit ihr sich ändert. Damit hatte Riemann einen zentralen Gedanken in Einsteins Gravitationstheorie vorweg geäußert.
Mit einem projektiven Modell für die nichteuklidische Geometrie konnte Felix Klein (1849-1925) die Widerspruchsfreiheit dieser Geometrie auf die Widerspruchsfreiheit der projektiven Geometrie zurückführen. Damit war die Existenzberechtigung der neuen Geometrie erwiesen, und das neue Denken über die Geometrie wurde schließlich Allgemeingut der Forschung. In seinem berühmt gewordenen „Erlanger Programm“ formulierte Klein 1872 einen einheitlichen Standpunkt für den Aufbau verschiedener geometrischer Systeme. Beim weiteren technischen Ausbau der Riemannschen Geometrie führte E. Christoffel (1829-1900) Ausdrücke der „kovarianten Differentiation“ ein. Die systematische Formulierung des „absoluten Differentialkalküls“ wurde schließlich von den italienischen Mathematikern Gregorio Ricci (1853-1925) und Tullio Levi-Civita (1873-1941) ausgearbeitet.[11]
Der bedeutende Physiker und Physiologe Hermann von Helmholtz (1821-1894) hat in seiner Schrift „Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen“ physikalische Aspekte in den Vordergrund gestellt. Geht man von der anschaulich wahrnehm-

[10] Postum veröffentlicht in Nachr. Ges. Wiss. Göttingen **13**, 133 (1868), s. auch B. Riemann, Gesammelte Werke, Teubner, Leipzig 1892, S. 272.

[11] Eine zusammenfassende Darstellung ihrer Ergebnisse wurde 1901 veröffentlicht: Math. Ann. **54**, 125 (1901).

baren freien Beweglichkeit ausgedehnter starrer Körper aus, dann sind, wie Helmholtz gezeigt hat, nur Räume mit konstanter Krümmung K zugelassen, wobei der Wert von K experimentell zu bestimmen ist. Dadurch wird die herausgehobene Bedeutung der Theorie der euklidischen Geometrie ($K = 0$) verständlich. Für die weitere Entwicklung hat sich jedoch die Annahme ausgedehnter starrer Körper als zu einschränkend erwiesen. Riemann dagegen geht bei seiner Verallgemeinerung der Geometrie davon aus, daß Abstände nur für infinitesimal benachbarte Punkte erklärt sind. Zu Riemanns Vorstellungen bekannte sich der Geometer W.K. Clifford (1845-1879), der ebenfalls in Riemanns Begriff des Raumes die Möglichkeit einer Verbindung von Geometrie und Physik sah. Nach seinen Spekulationen können leichte zeitliche Variationen der Krümmung Wirkungen hervorrufen, die sich wie eine Kräuselung auf dem Raum in der Art einer Welle fortpflanzen und als Bewegung der Materie deuten lassen.

Wichtige Beiträge von Minkowski und Hilbert

Diese und andere (spekulative) Ideen, so brillant und originell sie auch gewesen sein mögen, waren offensichtlich verfrüht. Es fehlte zu der Zeit die Vorstellung einer Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit, die für die mathematische Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie wesentlich ist. Erst nach dem Verständnis der Elektrodynamik im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie wurde die grundlegende Idee der vierdimensionalen Raum-Zeit den Physikern nach und nach vertraut. Die vierdimensionale Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie durch Hermann Minkowski (1864-1909) ist auch von Einstein selbst zunächst als rein formal („zu viel Mathematik“) angesehen worden. Später hat er wiederholt betont wie hilfreich, ja unentbehrlich, dieser wichtige Beitrag Minkowskis für die Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie gewesen ist.

Albert Einstein mußte die mathematische Methode der Differentialgeometrie erst lernen, dem in Göttingen lehrenden Mathematiker David Hilbert (1862-1943) war sie geläufig. So wird verständlich, daß Hilbert, der an physikalischen Fragestellungen sehr interessiert war, einen wichtigen Beitrag zur Gravitationstheorie in der letzten Phase ihrer Entwicklung leisten konnte. In seinem Vortrag (vom 20. Nov. 1915) in der Göttinger Akademie über die „Grundlagen der Physik“ teilte er das Ergebnis seiner Bemühungen mit, eine von Gustav Mie (1867-1957) vorgeschlagene elektrodynamische Feldtheorie der Materie und die sich entwickelnde Einsteinsche Gravitationstheorie zu einer einheitlichen Feldtheorie der Materie zu verbinden. Er ging dabei von einigen Axiomen aus. Hierzu gehörte die Formulierung eines Hamiltonschen Variationsprinzips, das die allgemeine Kovarianz berücksichtigte und aus dem die beiden Grundgleichungssysteme der einheitlichen Theorie in einfacher Weise folgen. Dieser Weg zur Herleitung der Feldgleichungen war für den Mathematiker Hilbert evident. In seiner ersten Mitteilung hat Hilbert die Feldgleichungen der Gravitation noch nicht explizit angegeben, sondern in einer späteren korrigierten Fassung. Obwohl Hilbert die Mitteilung am 20. November fünf Tage früher vorgetragen hatte als Einstein seine Arbeit über die Feldgleichungen der Gravitation, hat es neben einer vorübergehenden Verstimmung keinen Prioritätenstreit zwischen den Autoren gegeben. Hilbert war zu seiner Einbeziehung der Ansätze Einsteins zur Gravitationstheorie in den eigenen systematischen Entwurf über die Grundlagen der Physik durch Veröffentlichungen Einsteins sowie dessen Vorträge in Göttingen im Sommer 1915 angeregt worden und hat die Priorität Einsteins nicht in Frage gestellt.[12] Seine Formulierung des Hamiltonschen Variationsprinzips zur Herleitung der Feldgleichungen bleibt ein wichtiger Beitrag zur Allgemeinen Relativitätstheorie.

Weitere Entwicklung bis 1930

Nach dem Stand der Theorie Ende 1915 werden drei relativistische Effekte vorhergesagt, die über den Rahmen der Newtonschen Theorie hinausgehen:

1. Die Rotverschiebung der Spektrallinien im Gravitationsfeld.

2. Die Lichtablenkung am Sonnenrand, die nun doppelt so groß herauskommt als in den früheren Rechnungen.

3. Das Vorrücken des Perihels des Planeten Merkur um 43 Bogensekunden pro Jahrhundert, der Wert, der später durch Beobachtungen bestätigt werden konnte.

Die historische Entwicklung der Allgemeinen Relativitätstheorie soll hier nicht weiter in ihren Einzelheiten verfolgt werden. Wir deuten nur einige herausragende Ergebnisse bis zum Jahr 1930 an. Der Astronom Karl Schwarzschild (1873-1916) fand 1916 die später nach ihm benannte erste exakte Lösung der Feldgleichungen, die das Gravitationsfeld im Außenraum einer kugelsymmetrischen Massenverteilung beschreibt. Die Schwarzschild-Lösung stellt damit, 250 Jahre nach Newton, die Verallgemeinerung des Newtonschen Gravitationsgesetzes (1666) für die Planetenbewegung im Sonnensystem dar.
Bald nach Abschluß seiner Theorie arbeitete Einstein zwei Anwendungen der Feldgleichungen aus und eröffnete damit neue Forschungsgebiete, die noch heute von aktueller Bedeutung sind und auch in Zukunft von Interesse sein werden. Bereits 1916 konnte er mit Hilfe der Feldgleichungen die Existenz und die wichtigsten Eigenschaften von Gravitationswellen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, vorhersagen. Zwei Jahre später gelang ihm die Herleitung der berühmten Quadrupolformel für die Energieabstrahlung durch Gravitationswellen, die von relativ zueinander beschleunigten Massen ausgehen.

[12] Hilbert sagte einmal „Jeder Straßenjunge in unserem mathematischen Göttingen versteht mehr von vierdimensionaler Geometrie als Einstein. Aber trotzdem hat Einstein die Sache gemacht und nicht die großen Mathematiker.“ „Und wissen Sie“, fragte Hilbert in einer Gesellschaft von Mathematikern, „warum Einstein das Originellste und Tiefste über Raum und Zeit gesagt hat, das in dieser Zeit gesagt wurde? Weil er weder die Philosophie noch die Mathematik von Zeit und Raum gelernt hat.“ Zitiert nach Philipp Frank: Albert Einstein. Sein Leben und seine Zeit.,Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1979, S. 335. Eine objektive Darstellung der damaligen Situation und der Beziehung zwischen Einstein und Hilbert findet man in A. Pais, l.c., S. 261 ff..

Einsteins Arbeit aus dem Jahr 1917 „Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie“[13] öffnete den Weg zu der sich danach entwickelnden relativistischen Kosmologie. Dem damaligen Stand der Kenntnisse und Vorstellungen entsprechend, ist das von Einstein entworfene kosmologische Modell statisch. Es hat jedoch eine endliche Ausdehnung und ist unbegrenzt, analog z.B. der Kugeloberfläche, die keine Grenzen, aber dennoch einen endlichen Flächeninhalt hat. Um eine statische Lösung der Feldgleichungen bei gleichmäßiger Verteilung der Materie zu erhalten, hat Einstein in die Feldgleichungen die kosmologische Konstante eingeführt. Dieser Term entspricht bei positivem Vorzeichen der Konstanten einer allgemeinen Abstoßung. Die durch die Gravitation bedingte Kontraktion der Materie wird so kompensiert, und die Lösung wird statisch.

Den entscheidenden Fortschritt in der weiteren Entwicklung der relativistischen Kosmologie erzielte dann 1922 Alexander Friedmann (1888-1925). Unter der Annahme einer isotropen, homogenen Materieverteilung fand er, daß die ursprünglichen Feldgleichungen ohne das kosmologische Glied zeitabhängige Lösungen zulassen, die einem expandierenden (bzw. sich zusammenziehenden) Weltall entsprechen.[14] Dieses Modell eines zeitlich sich entwickelnden Weltalls fand erst einige Jahre später Anerkennung, nachdem Edwin P. Hubble (1889-1953) im Jahr 1929 seine bahnbrechenden Ergebnisse über die Fluchtbewegungen der Galaxien veröffentlicht hatte. Diese und weitere Erkenntnisse haben zu neuen kosmlogischen Modellen geführt und schließlich zu dem heute favorisierten Standardmodell des nach dem Urknall (d.h. nach der quantengravitativen Ära) expandierenden Universums.

Die entscheidende Prüfung erfuhr die Allgemeine Relativitätstheorie bei den anläßlich einer Sonnnenfinsternis 1919 von der Royal Astronomical Society unternommenen Expeditionen nach Sobral (Brasilien) und zu der vor Afrika im Golf von Guinea gelegenen Insel Principe. Die vorhergesagte Ablenkung des von Fixsternen ausgesandten, dicht am Rand der verdunkelten Sonne vorbeigehenden Lichts, konnte in richtiger Größenordnung gemessen werden. Nach diesem spektakulären Test wurde die Allgemeine Relativitätstheorie anerkannt und Albert Einstein wurde weltweit berühmt.

[13] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. 1917, S. 142; Abdruck in „Das Relativitätsprinzip“, l.c..

[14] A. Friedmann, Z. Phys. **10**, 377 (1922); **21**, 326 (1924).

Kapitel 6

Die Grundgesetze der Physik in gekrümmter Raum-Zeit

In diesem Kapitel wenden wir uns der Frage zu, wie man die im Minkowski-Raum formulierten Grundgesetze auf die Verhältnisse der Riemannschen Raum-Zeit verallgemeinern und damit die Schwerkraft in die relativistische Theorie einbeziehen kann. Aufgrund des Äquivalenzprinzips und der damit verbundenen einfachen Wirkung des Gravitationsfeldes darf man erwarten, daß die neu zu formulierenden physikalischen Gesetze den bekannten Gesetzen im Minkowski-Raum in der Form durchaus ähnlich sind.

6.1 Der Übergang von der Differentialgeometrie zur Gravitation

Wir fassen die wesentlichen Forderungen, die bei der Formulierung der Gravitationstheorie zu stellen sind, nochmals zusammen. Die Raum-Zeit, d.h. die Menge der Ereignispunkte, ist eine vierdimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Die auf ihr definierte Metrik bestimmt die räumlichen Entfernungen und Zeitintervalle.
Durch geeignete Wahl der Koordinaten ist es möglich, die Metrik in einem beliebigen Ereignispunkt auf die Minkowski-Form $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, -1, -1, -1)$ zu bringen.[1] Außerdem sind die beiden folgenden Forderungen zu erfüllen. Zunächst muß man beschreiben, wie die physikalischen Objekte (Körper, elektromagnetische Felder, usw.) sich in der gekrümmten Raum-Zeit verhalten und außerdem angeben können, wie die Krümmung durch die Energie-Massenverteilung der vorhandenen Objekte bestimmt wird. Dies entspricht der Aufstellung der Bewegungsgleichungen sowie der Feldgleichungen der Theorie. Wir fragen zunächst nur danach, wie eine vorgegebene Metrik die physikalischen Objekte, d.h. Teilchen (Mechanik) oder Felder (Elektrodynamik),

[1] Bei der Diskussion n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten haben wir bisher lateinische Buchstaben als Indizes verwendet. Von nun an sollen die in den Tangentialräumen der 4-dimensionalen Raum-Zeit definierten Tensoren durch griechische Buchstaben $\mu, \nu, \ldots$ gekennzeichnet werden, die von 0 bis 3 laufen. Dagegen durchlaufen die lateinischen Buchstaben $m, n, \ldots$ nur die Werte 1,2,3 und sind damit als Indizes der räumlichen Komponenten zu verstehen.

beeinflußt. In Inertialsystemen erfolgt die freie Bewegung längs Geraden. Diese sind in der gekrümmten Raum-Zeit durch Geodäten zu ersetzen. Wir können demnach den Einfluß der Metrik auf massive Körper durch folgende Aussage beschreiben. In einem Gravitationsfeld „frei fallende“ Teilchen bewegen sich längs zeitartiger Geodäten. Frei fallend bedeutet hier bei Abwesenheit anderer Kräfte. Hierfür haben wir früher den Begriff Standardbewegung eingeführt.
Wie aber werden z.B. elektromagnetische Felder durch die Metrik beeinflußt? In lokalgeodätischen Koordinaten geht die Geodätengleichung in die kräftefreie Bewegungsgleichung über, wie sie in einem Inertialsystem gilt. Wir können daher Inertialsysteme und Systeme in lokal geodätischen Koordinaten identifizieren. Das führt auf folgende Präzisierung des starken Äquivalenzprinzips: Die physikalischen Gesetze, die in der Speziellen Relativitätstheorie in Tensorschreibweise ausgedrückt werden, haben genau die gleiche Form in einem lokalgeodätischen Koordinatensystem (d.h. lokalen Inertialsystem) der gekrümmten Raum-Zeit. Wegen der Tensoreigenschaft gelten sie dann auch in den allgemeinen Koordinaten des Riemannschen Raumes.
Das bedeutet, ausgehend von den lorentzinvariant formulierten Gleichungen erhält man die in der gekrümmten Raum-Zeit gültigen physikalischen Gesetze dadurch, daß man die partiellen Ableitungen (Komma) durch kovariante (Semikolon) ersetzt und anstelle von $\eta_{\mu\nu}$ die Riemannsche Metrik $g_{\mu\nu}$ verwendet. Diese „Komma-Semikolon-Regel“ garantiert die Kovarianz der so verallgemeinerten Gleichungen. Das in Abschnitt 3.2 erwähnte allgemeine Kovarianzprinzip ist damit erfüllt.
Man beachte jedoch, daß die Übertragungsvorschrift „partielle $\rightarrow$ kovariante Ableitung“ im Fall höherer Ableitungen nicht eindeutig ist, denn im Unterschied zu den partiellen Ableitungen sind kovariante nicht vertauschbar. Über die richtige Reihenfolge der Ableitungen kann man in der Praxis meistens einfach entscheiden.
Der Übergang zu lokal geodätischen Koordinaten ist nur in einem Weltpunkt möglich. In der unmittelbaren Umgebung des gewählten Punktes gilt daher infolge der Krümmung nur näherungsweise $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$. Diesen wesentlichen Unterschied zwischen der Raum-Zeit der Speziellen Relativitätstheorie mit der global gültigen Metrik $\eta_{\mu\nu}$ und der des Riemannschen Raumes in der Gravitationstheorie wollen wir nochmals verdeutlichen. Führen wir z.B. im Ursprung $(x^\mu) = (0,0,0,0)$ ein lokal geodätisches Koordinatensystem ein, dann gilt dort $\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = 0$ und folglich auch $\partial_\sigma g_{\mu\nu}(0) = 0$. Für die Punkte in der Umgebung, d.h. für kleine Werte der Koordinaten x^μ, ergibt die Taylor-Entwicklung

$$g_{\mu\nu} \simeq g_{\mu\nu}(0) + \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}\right)_0 x^\alpha x^\beta \quad .$$

Mit Hilfe einer linearen Transformation kann man $g_{\mu\nu}(0)$ auf die Minkowski-Form $\eta_{\mu\nu}$ bringen. Man erhält in den neuen Koordinaten (Striche weggelassen) wieder eine Gleichung in obiger Form (mit $g_{\mu\nu}(0) \rightarrow \eta_{\mu\nu}$)

$$g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu}\right)_0 x^\alpha x^\beta \quad . \tag{6.1}$$

Wie wir bereits wissen, kann der Riemannsche Krümmungstensor durch die zweiten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ ausgedrückt werden (s. Gl. (5.28)). Die Koeffizienten $(\partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu})_0$

$\neq 0$ geben daher die durch das vorhandene Gravitationsfeld hervorgerufene Abweichung von der flachen Raum-Zeit an. Der Gültigkeitsbereich einer Approximation $g_{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}$ hängt also von der Größe der zweiten Ableitungen des metrischen Tensors ab und natürlich von der Genauigkeit, mit der man Abweichungen vom Inertialsystem experimentell feststellen kann.

6.2 Eigenzeit, Gleichzeitigkeit, Raumintervall

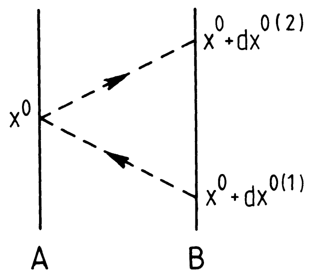
Wir wenden uns nun der Frage zu, wie man aus den allgemeinen Koordinaten $\{x^\mu\}$ der Ereignisse die wahren (meßbaren) Zeitintervalle und Entfernungen bestimmen kann. Hierbei können wir analog zur Speziellen Relativitätstheorie vorgehen.
Um die Beziehung zwischen der von einem Beobachter gemessenen Eigenzeit τ und der Zeitkoordinate $x^0 = ct$ zu ermitteln, gehen wir von zwei zeitlich infinitesimal benachbarten Ereignissen aus, die an ein und demselben Raumpunkt stattfinden. Berücksichtigt man die dann geltende Bedingung $\mathrm{d}\vec{x} = 0$ in dem allgemeinen Ausdruck für das Linienelement $\mathrm{d}s^2$, dann ist $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}\tau^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2$, d.h. es gilt

$$\mathrm{d}\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\mathrm{d}x^0 \quad , \text{ mit } g_{00} > 0 \quad . \tag{6.2}$$

Für das Intervall der Eigenzeit zwischen zwei beliebigen Ereignissen im gleichen Raumpunkt erhält man daraus

$$\tau = \frac{1}{c}\int \sqrt{g_{00}(x)}\mathrm{d}x^0 \quad . \tag{6.3}$$

Man beachte, daß in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Eigenzeit in verschiedenen Weltpunkten auf unterschiedliche Weise mit der Zeitkoordinate zusammenhängt. Wir bemerken schon jetzt, daß dies zu einer Frequenzänderung periodischer Vorgänge führt, die an verschiedenen Orten in einem Gravitationsfeld stattfinden. Beim Übergang zum Minkowski-Raum $(g_{00} = 1)$ erhält man aus (6.3) die bekannte Eigenzeit im Ruhsystem.
In der Speziellen Relativitätstheorie kommt dem Begriff der Gleichzeitigkeit keine absolute Bedeutung zu. Bei der Definition der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse, die an verschiedenen Raumpunkten stattfinden, liegt es nahe Signale auszutauschen, deren Geschwindigkeit man kennt. Die Messung einer Geschwindigkeit setzt nun aber die Synchronisation von Uhren (d.h. die Gleichzeitigkeit) schon voraus. Dieser Zirkelschluß kann vermieden werden, wenn man die Gleichzeitigkeit von Ereignissen operativ definiert. Die als konstant und richtungsunabhängig angenommene Geschwindigkeit des Signals braucht dabei nicht bekannt zu sein.
Wir betrachten die infinitesimal benachbarten Weltpunkte A und B, deren Weltlinien durch die Koordinaten x^μ und $x^\mu + \mathrm{d}x^\mu$ beschrieben werden. Das Signal werde in B zur dortigen Zeit $x^0 + \mathrm{d}x^{0(1)}$ emittiert, in A ohne Zeitverlust zur Zeit x^0 reflektiert und treffe in $B(x^0 + \mathrm{d}x^{0(2)})$ wieder ein (s. Fig. 10).
Die in A und B mitgeführten Uhren identischer Bauart sind offenbar dann zum Zeitpunkt x^0 synchron, wenn für den Beobachter in B die Hälfte der Zeit zwischen dem



Figur 10: Zeitliche Reihenfolge der Ereignisse für das Lichtsignal bei der Definition der Gleichzeitigkeit und der räumlichen Entfernung.

Absenden und dem Wiedereintreffen des Signals in B verstrichen ist,

$$x^0 + \delta x^0 = x^0 + \mathrm{d}x^{0(1)} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}x^{0(2)} - \mathrm{d}x^{0(1)}\right) \quad . \tag{6.4}$$

Verwendet man Licht als Signal, dann gilt

$$\mathrm{d}s^2 = g_{00}(\mathrm{d}x^0)^2 + 2g_{0m}\mathrm{d}x^0\mathrm{d}x^m + g_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n = 0 \quad .$$

Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung nach $\mathrm{d}x^0$ ergibt die beiden Wurzeln

$$\mathrm{d}x^{0(1),(2)} = \frac{1}{g_{00}}\left\{-g_{0m}\mathrm{d}x^m \mp \left[(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})\,\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n\right]^{\frac{1}{2}}\right\} \quad , \tag{6.5}$$

wobei hier entsprechend der in Figur 10 skizzierten zeitlichen Reihenfolge der Ereignisse $\mathrm{d}x^{0(1)} < 0$ angenommen wurde. Setzt man diese Ausdrücke in (6.4) ein, so folgt

$$\delta x^0 = -\frac{g_{0m}}{g_{00}}\mathrm{d}x^m \tag{6.6}$$

als Bedingung für die Synchronisation. Diese Differenz im Gang der Uhren tritt bei zwei Ereignissen auf, die in infinitesimal benachbarten Punkten stattfinden. Bei Fortsetzung dieses Verfahrens ist es somit möglich, die Gleichzeitigkeit von Ereignissen längs einer Weltlinie zu definieren. Die Synchronisation von Uhren längs geschlossener Weltlinien ist nicht in beliebigen, sondern nur in solchen Koordinaten möglich, in denen die Komponenten g_{0m} des metrischen Tensors gleich Null sind. Andernfalls käme es zu einem Widerspruch, denn man würde bei Rückkehr zum Ausgangspunkt nach Gl.(6.6) Differenzwerte $\neq 0$ erhalten, die nicht vorhanden sein dürfen. Da aber die zehn Komponenten des metrischen Tensors nicht eindeutig bestimmt sind (s. Text nach Gl.(3.20)), kann man die Koordinaten so wählen, daß die störenden Komponenten g_{0m} identisch verschwinden. Auf diese Weise ist die vollständige Synchronisation von Uhren in einem beliebigen Gravitationsfeld möglich.

Bei der Definition der räumlichen Entfernung betrachten wir ebenfalls die in Figur 10 skizzierte Ausbreitung eines Lichtsignals von B nach A und wieder zurück. Nach Multiplikation der dafür benötigten Zeit (Eigenzeit auf der Weltlinie B) mit c erhält man die doppelte Entfernung zwischen den Punkten. Die Differenz der Zeitkoordinaten bei der Emission und bei der Rückkehr des Signals zum gleichen Punkt B ist mit den Ausdrücken in (6.5)

$$\mathrm{d}x^{0(2)} - \mathrm{d}x^{0(1)} = \frac{2}{g_{00}}\left[(g_{0m}g_{0n} - g_{mn}g_{00})\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n\right]^{1/2} \quad .$$

Das entsprechende Intervall der Eigenzeit folgt daraus nach (6.2) durch Multiplikation mit $\sqrt{g_{00}}/c$. Die gesuchte Entfernung $\mathrm{d}l$ zwischen den Punkten erhält man schließlich, indem man das Eigenzeitintervall mit $c/2$ multipliziert. Wir schreiben das Ergebnis in der Form

$$\mathrm{d}l^2 = \tilde{g}_{mn}\mathrm{d}x^m\mathrm{d}x^n \ , \ \tilde{g}_{mn} := -g_{mn} + \frac{g_{0m}g_{0n}}{g_{00}} \quad . \tag{6.7}$$

Dabei bedeuten die Größen $\tilde{g}_{mn}$ die Komponenten der Metrik im momentanen Ruhraum des Beobachters. Sie beschreiben die geometrischen Eigenschaften des dreidimensionalen Raumes. Man kann zeigen, daß

$$-g^{lm}\tilde{g}_{mn} = \delta^l_n \tag{6.8}$$

gilt, d.h. der Tensor $-\tilde{g}_{mn}$ reziprok zu dem kontravarianten dreidimensionalen Tensor g^{mn} ist (s. Aufgabe 22).
Wir bemerken, daß dieser Begriff einer bestimmten Entfernung im allgemeinen Fall auf infinitesimale Gebiete beschränkt ist. Da die Metrik im Allgemeinen auch von der Zeitkoordinate x^0 abhängt, wäre ein Integral über $\mathrm{d}l$ nicht eindeutig, sondern würde von der Weltlinie abhängen, längs der es zwischen den räumlichen Punkten erstreckt wird. Sind andererseits die $g_{\mu\nu}$ zeitunabhängig, dann ist das Integral von $\mathrm{d}l$ sinnvoll und die Entfernung kann auch im endlichen Raumgebiet definiert werden.

6.3 Mechanik im Gravitationsfeld

Im lokalen Inertialsystem lautet die relativistische Bewegungsgleichung für ein freies Teilchen

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \quad , \tag{6.9}$$

wobei $u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$ den Vierervektor der Geschwindigkeit und τ die Eigenzeit bedeuten. Nach der durch das Äquivalenzprinzip begründeten Übergangsvorschrift geht man bei der Einbeziehung des Gravitationsfeldes in (6.9) zur absoluten Ableitung über und erhält so die Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{D}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{6.10}$$

bzw. mit der Definition (4.58) ausführlicher geschrieben

$$\frac{\mathrm{d}^2x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\varrho}\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\varrho}{\mathrm{d}\tau} = 0 \quad . \tag{6.11}$$

Da $\mathrm{d}^2x^\mu/\mathrm{d}\tau^2$ die Viererbeschleunigung ist, kann $-m\Gamma^\mu_{\nu\varrho}u^\nu u^\varrho$ als die auf den Probekörper der Masse m im Gravitationsfeld wirkende „Viererkraft“ gedeutet werden.

Wegen $\Gamma \propto \partial g$ spielen daher die $g_{\mu\nu}$ die Rolle des Potentials und ihre Ableitungen $\Gamma^{\mu}_{\nu\varrho}$ stellen die entsprechende Feldstärke des Gravitationsfeldes dar.
Unter dem Einfluß äußerer Kräfte K^{μ} weicht der Körper von der Standardbewegung ab. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$m\frac{\mathrm{D}u^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = mu^{\mu}_{;\nu}\frac{\mathrm{d}x^{\nu}}{\mathrm{d}\tau} = K^{\mu} \quad . \tag{6.12}$$

Die im Minkowski-Raum geltende Relation $\eta_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = c^2$ geht über in $g_{\mu\nu}u^{\mu}u^{\nu} = c^2$. Da c eine Konstante ist, gilt $u_{\mu;\nu}u^{\mu} = 0$, d.h. der Vierervektor der Geschwindigkeit steht senkrecht auf der Beschleunigung und damit auf der Kraft K^{μ}

$$g_{\mu\nu}u^{\mu}K^{\nu} = 0 \quad . \tag{6.13}$$

Demnach sind die vier Bewegungsgleichungen (6.12) nicht unabhängig voneinander.
Das Produkt aus der Masse m und der Vierergeschwindigkeit u^{μ} ist gleich dem Impulsvektor

$$p^{\mu} = mu^{\mu} \tag{6.14}$$

und wegen $u^{\mu}u_{\mu} = c^2$ gilt auch

$$g_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu} = m^2c^2 \quad . \tag{6.15}$$

Die Bewegungsgleichung für einen kräftefreien Probekörper der Masse m folgt in der Speziellen Relativitätstheorie nach dem Prinzip der kleinsten Wirkung aus dem Wirkungsintegral

$$S = -mc\int \mathrm{d}s = -mc\int (\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu})^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{6.16}$$

Bewegt sich der Körper in einem Gravitationsfeld, dann wird nach dem Äquivalenzprinzip die Bewegungsgleichung durch das verallgemeinerte Wirkungsintegral bestimmt

$$S = -mc\int (g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu})^{\frac{1}{2}} \quad . \tag{6.17}$$

Für spätere Anwendungen ist es interessant zu wissen, wie in niedrigster Näherung die Komponente g_{00} des metrischen Tensors durch das Gravitationsfeld einer Masse m bestimmt wird. In nichtrelativistischer Näherung $v \ll c$ geht (6.16) über in

$$S = -mc^2\int\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t \approx -mc^2\int\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\mathrm{d}t \quad .$$

Die entsprechende Lagrange-Funktion ist der bekannte Ausdruck

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad .$$

Bewegt sich der Körper in einem Gravitationsfeld, dann tritt die potentielle Energie $-m\phi$ hinzu

$$L = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 - m\phi \quad ,$$

wobei $\phi = -MG/r$ das Newtonsche Gravitationspotential der Masse M bedeutet. Demnach lautet das Wirkungsintegral für einen Probekörper der Masse m bei vorhandenem Gravitationsfeld in nichtrelativistischer Näherung

$$S = \int L\mathrm{d}t = -mc \int \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) \mathrm{d}t \quad . \tag{6.18}$$

Für das unter dem Integral stehende Linienelement erhält man so den Ausdruck

$$\mathrm{d}s = \left(c - \frac{v^2}{2c} + \frac{\phi}{c} \right) \mathrm{d}t \quad .$$

Wenn man quadriert und der Näherung entsprechend die Terme höherer Ordnung wie v^2/c^2 und ϕ^2/c^2 vernachlässigt, dann folgt mit $\vec{v}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{r}$

$$\mathrm{d}s^2 = \left(c^2 + 2\phi \right) \mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}\vec{r}^2 \quad . \tag{6.19}$$

Daraus können wir den gesuchten Zusammenhang der g_{00}-Komponenten des metrischen Tensors mit dem Gravitationsfeld ϕ entnehmen

$$g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{c^2} \ , \ \phi = -\frac{MG}{r} \quad . \tag{6.20}$$

Dieses Ergebnis wird sich im folgenden als nützlich erweisen.

6.4 Elektrodynamik im Gravitationsfeld

Wir kommen nun zur Formulierung der Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes in einem durch die Metrik $g_{\mu\nu}(x)$ gegebenen Gravitationsfeld. Im lokalen Inertialsystem genügt der Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \tag{6.21}$$

den Maxwell-Gleichungen in der bekannten Form

$$F_{\langle\mu\nu,\lambda\rangle} := F_{\mu\nu,\lambda} + F_{\nu\lambda,\mu} + F_{\lambda\mu,\nu} = 0 \tag{6.22}$$

und

$$F^{\mu\nu}_{\ \ ,\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \quad , \tag{6.23}$$

wobei $j^\mu = \varrho \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}t$ den Vektor der Stromdichte im Minkowski-Raum bedeutet. Gemäß der Übertragungsvorschrift (Komma $\rightarrow$ Semikolon) geht zunächst $F_{\mu\nu}$ über in

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} \quad . \tag{6.24}$$

Da die Christoffel-Symbole symmetrisch sind, gilt aber

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \quad , \tag{6.25}$$

d.h. die Beziehung zwischen $F_{\mu\nu}$ und den Potentialen A_μ ändert sich nicht.
Die homogenen Maxwell-Gleichungen (6.22) folgen als Identität aus der Definition des Feldstärketensors (6.21). Wegen (6.25) gilt somit für die kovariante zyklische Ableitung auch

$$F_{\langle\mu\nu;\lambda\rangle} = F_{\langle\mu\nu,\nu\rangle} = 0 \quad . \tag{6.26}$$

Diese Gleichungen ändern also ihre Gestalt ebenfalls nicht.
Bevor wir die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in kovarianter Form schreiben, wollen wir den Vektor der Stromdichte in allgemeinen Koordinaten bestimmen. Die elektrische Ladung q ist eine skalare Größe, ebenso die Ladung $\mathrm{d}q$ innerhalb eines infinitesimalen Volumens $\mathrm{d}x^3$. Es gilt $\mathrm{d}q = \varrho \mathrm{d}x^3$, wobei ϱ die Ladungsdichte bedeutet. Mit dem Vektor $\mathrm{d}x^\mu$ ist dann $\varrho \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^\mu$ ebenfalls ein Vektor und daher auch

$$\varrho \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \mathrm{d}^3x = \varrho \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}^4x}{c} \quad . \tag{6.27}$$

Nach (5.24) ist jedoch nicht d^4x sondern $\sqrt{g}\mathrm{d}^4x$ das bei allgemeinen Koordinatentransformationen invariante Volumen und dementsprechend $J^\mu\sqrt{g}\mathrm{d}^4x/c$ ein Vektor, wobei J^μ den gesuchten Vektor bezeichnet. Der Vergleich mit (6.27) führt daher auf den kontravarianten Vektor der Stromdichte

$$J^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} j^\mu \ , \ j^\mu = \varrho \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{6.28}$$

Der bekannte speziell-relativistische Stromdichtevektor j^μ genügt der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad . \tag{6.29}$$

Die allgemein kovariante Kontinuitätsgleichung

$$J^\mu_{;\nu} = 0 \tag{6.30}$$

können wir nun leicht verifizieren. Nach (5.20) gilt für die kovariante Divergenz des Vektors J^μ

$$J^\mu_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} J^\mu)_{,\mu} \tag{6.31}$$

und wegen (6.28)

$$(\sqrt{g} J^\mu)_{,\mu} = j^\mu_{,\mu} \quad . \tag{6.32}$$

Daraus folgt, daß wegen der Stromerhaltung (6.29) auch die Kontinuitätsgleichung (6.30) gelten muß.
Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen in einem Gravitationsfeld lauten dann bei Verwendung der Formel (5.21)

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} F^{\mu\nu}\right)_{,\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^\mu \quad . \tag{6.33}$$

Der Erhaltungssatz für die Stromdichte (6.29) folgt aus der Invarianz der Theorie gegenüber den Eichtransformationen der Potentiale

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad , \tag{6.34}$$

wobei $\lambda(x)$ eine skalare Funktion ist. Es ist interessant festzustellen, daß dieser Zusammenhang auch dann besteht, wenn ein Gravitationsfeld vorhanden ist. Das im lokalen Inertialsystem formulierte Wirkungsintegral für das an die Stromdichte j^μ gekoppelte elektromagnetische Feld

$$S = \int \mathrm{d}^4x \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \right) \tag{6.35}$$

geht bei Anwesenheit eines Gravitationsfeldes über in

$$S = \int \mathrm{d}^4x \mathcal{L} = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{g} \left(-\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu \right) \quad . \tag{6.36}$$

Dabei ist J^μ der kontravariante Vektor der Stromdichte (6.28), und bei der Bildung des skalaren Produktes (bzw. beim Herauf- und Herunterziehen der Indizes) wird der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ anstelle von $\eta_{\mu\nu}$ benutzt.
Die infinitesimale Eichtransformation der Potentiale $\delta A_\mu = \partial_\mu \lambda$ läßt $F_{\mu\nu}$ unverändert ($\delta F_{\mu\nu} = 0$) und die Variation des Wirkungsintegrals wird dabei nach partieller Integration

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}^4x \sqrt{g} J^\mu \partial_\mu \lambda \\ &= -\frac{1}{c} \int \mathrm{d}^4x \partial_\mu \left(\sqrt{g} J^\mu \lambda \right) + \frac{1}{c} \int \mathrm{d}^4x \lambda \partial_\mu \left(\sqrt{g} J^\mu \right) \quad . \end{aligned} \tag{6.37}$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauss (5.25) kann der erste Summand in ein Integral über die das vierdimensionale Volumen begrenzende Oberfläche übergeführt werden. Da nach Annahme λ auf der Begrenzung verschwindet, ergibt das Oberflächenintegral keinen Beitrag. Aus der Invarianz des Wirkungsintegrals $\delta S = 0$ folgt dann mit (6.31) die allgemein kovariante Kontinuitätsgleichung für die Stromdichte J^μ (6.30).
Die inhomogenen Maxwell-Gleichungen im Gravitationsfeld können auch direkt aus dem Wirkungsintegral (6.36) durch Variation der Potentiale A_μ als Euler-Lagrange-Gleichungen hergeleitet werden

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu} = 0 \quad . \tag{6.38}$$

Man findet

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\frac{1}{c} \sqrt{g} J^\mu \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu A_\mu} = \frac{1}{4\pi} \sqrt{g} F^{\mu\nu} \tag{6.39}$$

und folglich mit (5.21) die inhomogenen Maxwell-Gleichungen

$$F^{\mu\nu}_{;\nu} = -\frac{4\pi}{c} J^\mu \tag{6.40}$$

in der bekannten Form (6.33). Bildet man in dieser Gleichung die Divergenz, so erhält man wegen der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ als Konsistenzbedingung wieder die Kontinuitätsgleichung (6.30).
Ergänzend zu den Maxwell-Gleichungen geben wir noch die kovariante Verallgemeinerung der Bewegungsgleichung für ein Teilchen der Masse m und der Ladung q an

$$m\frac{\mathrm{D}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = m\left(\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\varrho}u^\nu u^\varrho\right) = \frac{q}{c}F^{\mu\nu}u_\nu \quad . \tag{6.41}$$

Zu bemerken ist ferner, daß elektromagnetische Felder, auch bei Abwesenheit von Materie, selbst Quellen der Gravitation sind. Die von den Feldern erzeugte Energie-Impulsdichte wird durch den Energie-Impuls-Tensor beschrieben. Ausgehend von dem bekannten speziell relativistischen Ausdruck erhält man den Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes bei vorhandenem Gravitationsfeld in der verallgemeinerten Form

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left\{g^{\mu\alpha}F_{\alpha\beta}F^{\beta\nu} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right\} \quad . \tag{6.42}$$

Dieser Tensor kommt als Inhomogenität in den Einsteinschen Feldgleichungen vor und ist somit eine Quelle des Gravitationsfeldes. Wir werden in den folgenden Ausführungen darauf näher eingehen.

6.5 Der Energie-Impuls-Tensor

Bevor wir im folgenden Kapitel die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation einführen, wollen wir vorbereitend zunächst auf die Quellen des Gravitationsfeldes in der Gestalt des Energie-Impuls-Tensors näher eingehen.
Bei den Anwendungen kann man zur Beschreibung der Gravitationswirkung materieller Systeme von dem Energie-Impuls-Tensor der idealen Flüssigkeit ausgehen. Dieser lautet im lokalen Inertialsystem[2]

$$T^{\mu\nu}_M = \frac{1}{c^2}\left(\varepsilon + p\right)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad . \tag{6.43}$$

Hier bezeichnen ε die totale Energiedichte und p den isotropen Druck im momentanen Ruhsystem. Der Tensor (6.43) ist symmetrisch und für abgeschlossene Systeme gilt der differentielle Erhaltungssatz

$$T^{\mu\nu}_{M\ ,\nu} = 0 \quad . \tag{6.44}$$

Sein Anwendungsbereich ist durchaus nicht auf ideale Flüssigkeiten beschränkt. Voraussetzung für die Verwendung von (6.43) ist, daß das physikalische System durch eine Energiedichte, bzw. dazu äquivalente Massendichte ϱ, einen isotropen Druck p, sowie ein Geschwindigkeitsfeld u^μ beschrieben werden kann. Wendet man $T^{\mu\nu}_M$ z.B. im Fall eines nichtrelativistischen Gases an, dann ist wegen $v_i \ll c$ der Beitrag der individuellen kinetischen Energien der Teilchen sowie der Druck zu vernachlässigen. Für ein

[2]Siehe z.B. U.E. Schröder, Spezielle Relativitätstheorie, l.c., S. 194.

Photonengas ist die zur Energiedichte $u = aT^4$ äquivalente Massendichte $\varrho = u/c^2$, und der Druck beträgt $p = u/3$. Im Fall einzelner makroskopischer Körper (etwa im Sonnensystem) ist die zur Masse äquivalente Energie viel größer als die anderen Energieformen.
Ist ein Gravitationsfeld vorhanden, dann geht (6.43) in den allgemein kovarianten Ausdruck über

$$T_M^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}\left(\varepsilon + p\right) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad , \tag{6.45}$$

wobei ε und p als Skalare und u^μ als Vektor im Riemannschen Raum aufzufassen sind. Aus der Tensorgleichung $T_{M\ ,\nu}^{\mu\nu} = 0$ (Energie-Impuls-Erhaltung) wird nach dem Korrespondenzprinzip

$$T_{M\ ;\nu}^{\mu\nu} = 0 \quad . \tag{6.46}$$

Da nun Gravitationskräfte auf die Flüssigkeit wirken, ist das System nicht mehr abgeschlossen, d.h. (6.46) kann nicht als integraler Erhaltungssatz für Energie und Impuls gedeutet werden. Dem Inhalt nach sind (6.46) die hydrodynamischen Grundgleichungen, welche die Bewegung der Flüssigkeit im Gravitationsfeld beschreiben.
Als Quellen des Gravitationsfeldes sind neben makroskopischen Körpern auch physikalische Felder, wie z.B. das elektromagnetische Feld, zu berücksichtigen. Wie findet man den entsprechenden Energie-Impuls-Tensor? Wir wollen im Folgenden eine Methode für die Bestimmung des Energie-Impuls-Tensors eines beliebigen physikalischen Systems (ausgenommen das Gravitationsfeld selbst) angeben, dessen Wirkungsintegral in allgemeinen krummlinigen Koordinaten in der Form geschrieben werden kann

$$S = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{g} L = \int \mathrm{d}^4x \mathcal{L} \quad . \tag{6.47}$$

Dabei hängt die als Skalar definierte Lagrange-Funktion $L(A, \partial A, g_{\mu\nu})$, bzw. die skalare Dichte $\mathcal{L}$ sowohl von den Zustandsvektoren des Systems (z.B. den Feldfunktionen A) und deren ersten Ableitungen, als auch den Gravitationspotentialen $g_{\mu\nu}$ ab. Das Wirkungsintegral im Fall des elektromagnetischen Feldes (6.36) ist hierfür ein Beispiel.
In der Speziellen Relativitätstheorie folgt nach dem Noether-Theorem aus der Invarianz des Wirkungsintegrals gegenüber raumzeitlichen Translationen der Energie-Impulserhaltungssatz. In differentieller Form ausgedrückt bedeutet dies, daß die Divergenz des Energie-Impuls-Tensors des abgeschlossenen Systems verschwindet, $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$. Aus der Tatsache, daß das Wirkungsintegral (6.47) unabhängig von der Wahl der Koordinaten ist, folgt in entsprechender Verallgemeinerung $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$, wobei $T^{\mu\nu}$ der gesuchte Energie-Impuls-Tensor ist.[3]
Zum Beweis gehen wir von der infinitesimalen Änderung der Koordinaten

$$x^{\mu'} = x^\mu + \delta x^\mu = x^\mu + \varepsilon \gamma^\mu(x) \ , \ |\varepsilon| \ll 1 \tag{6.48}$$

[3]Im allgemeinen Fall besitzt eine beliebige Raum-Zeit-Metrik keine Symmetrien. Das Verschwinden der verallgemeinerten Divergenz des Tensors $T^{\mu\nu}$ kann dann nicht als Erhaltungssatz interpretiert werden. Wesentlich ist hier der im folgenden Abschnitt 6.6 dargelegte Zusammenhang zwischen Symmetrien und integralen Erhaltungssätzen.

aus, mit ε als infinitesimalem, konstantem Parameter. Bei dieser Transformation bleibt das Wirkungsintegral (6.47) ungeändert, $\delta S = 0$. Die Variation δS ist das Ergebnis zweier Änderungen. Es variieren die Zustandsvariablen A (Feldfunktionen). Sie erfüllen jedoch die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen), die gerade daraus folgen, daß die Variation von S nach diesen Größen gleich Null ist. Diese Änderungen brauchen also nicht berücksichtigt zu werden. Die zweite Änderung rührt von den $g_{\mu\nu}$ her, und die Variation des Integranden führt auf

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}_{,\lambda} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\right]\delta g^{\mu\nu} + \partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}_{,\lambda}}\delta g^{\mu\nu}\right) \quad . \tag{6.49}$$

Die hier bei der Integration auftretende Divergenz kann nach dem Satz von Gauss in ein Integral über die begrenzende Oberfläche übergeführt werden. Wegen der Forderung $\delta g^{\mu\nu} = 0$ auf der Oberfläche, liefert das Oberflächenintegral keinen Beitrag und es bleibt

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}\delta g^{\mu\nu} = 0 \quad , \tag{6.50}$$

wobei die Variationsableitung definiert ist als

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial {g^{\mu\nu}}_{,\lambda}} \quad . \tag{6.51}$$

Die Änderungen der Komponenten des metrischen Tensors $\delta g^{\mu\nu}$ bei der Transformation (6.48) folgen aus dem Transformationsgesetz

$$g^{\mu'\nu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\varrho} g^{\lambda\varrho}(x) \quad . \tag{6.52}$$

Da die Transformation infinitesimal ist, erhält man in erster Ordnung von ε

$$g^{\mu'\nu'}(x') = g^{\mu\nu}(x) + {\xi^\mu}_{,\lambda} g^{\lambda\nu}(x) + {\xi^\nu}_{,\varrho} g^{\mu\varrho}(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad . \tag{6.53}$$

Hierbei haben wir zur Vereinfachung der Schreibweise $\varepsilon\gamma^\mu(x) \equiv \xi^\mu(x)$ gesetzt. Zum Vergleich der Terme als Funktionen derselben Variablen entwickeln wir die linke Seite nach Potenzen von ξ^μ. Da nur die Summanden niedrigster Ordnung zu berücksichtigen sind, können wir im Koeffizienten von ξ^μ anstelle von $g^{\mu'\nu'}$ die ungestrichenen Komponenten von $g^{\mu\nu}$ schreiben und erhalten

$$g^{\mu'\nu'}(x^\lambda + \xi^\lambda) = g^{\mu'\nu'}(x^\lambda) + {g^{\mu\nu}}_{,\lambda}\xi^\lambda + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad . \tag{6.54}$$

Man erhält schließlich mit (4.52) für die Änderung der $g^{\mu\nu}$ als Funktion von x

$$\delta g^{\mu\nu}(x) \equiv g^{\mu'\nu'}(x) - g^{\mu\nu}(x) = {\xi^\mu}_{,\lambda} g^{\lambda\nu} + {\xi^\nu}_{,\lambda} g^{\lambda\mu} - \xi^\lambda {g^{\mu\nu}}_{,\lambda} \quad . \tag{6.55}$$

Führt man statt der partiellen Ableitungen ${\xi^\mu}_{,\lambda}$ und ${\xi^\nu}_{,\lambda}$ die kovarianten Ableitungen ein, dann kann dieser Ausdruck in der zweckmäßigeren Form geschrieben werden

$$\delta g^{\mu\nu} = {\xi^\mu}_{;\lambda} g^{\lambda\nu} + {\xi^\nu}_{;\lambda} g^{\lambda\mu} \quad . \tag{6.56}$$

Die Variationsableitung (6.51) stellt eine Tensordichte dar, die in den Indizes symmetrisch ist. Man erhält andererseits eine Tensordichte aus einem Tensor, wenn dieser mit $\sqrt{g}$ multipliziert wird (vergl. (5.24)). Wir können daher durch die Definition

$$\frac{1}{2}\sqrt{g}T_{\mu\nu} := \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \tag{6.57}$$

den symmetrischen Tensor $T_{\mu\nu}$ einführen. Wir setzen (6.57) und den Ausdruck für $\delta g^{\mu\nu}$ (6.56) in die Gleichung (6.50) ein und erhalten, nachdem der zuvor eingeführte Faktor $1/2$ wegen der Symmetrie von $T_{\mu\nu}$ gekürzt wurde,

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}T_{\mu\nu}\xi^{\mu}{}_{;\lambda}g^{\lambda\nu} = 0 \quad . \tag{6.58}$$

Nach der Produktregel können wir hierfür auch schreiben

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\left[\left(\xi^{\mu}T_{\mu}^{\lambda}\right)_{;\lambda} - \xi^{\mu}T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{;\lambda}\right] = 0 \quad . \tag{6.59}$$

Das Integral über die kovariante Divergenz des Vektors im ersten Summanden kann nach dem Integralsatz von Gauss (5.25) in ein Oberflächeninegral umgeformt werden. Dieses Integral liefert keinen Beitrag, da nach Voraussetzung die ξ^{μ} auf der Oberfläche gleich Null sind. Es bleibt

$$\delta S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{g}\xi^{\mu}T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{;\lambda} = 0 \quad . \tag{6.60}$$

Da dies für beliebige ξ^{μ} gelten soll, folgt für den in (6.57) definierten Tensor $T_{\mu}{}^{\lambda}{}_{;\lambda} = 0$ und, weil die kovariante Ableitung von $g^{\mu\nu}$ verschwindet, auch

$$T^{\mu\lambda}{}_{;\lambda} = 0 \quad . \tag{6.61}$$

Wir erkennen darin die verallgemeinerte Form der für den speziell-relativistischen Energie-Impuls-Tensor geltenden Gleichung $T^{\mu\lambda}{}_{,\lambda} = 0$.
Aus diesem Grund liegt es nahe, den Energie-Impuls-Tensor eines durch die Lagrange-Funktion $L = \mathcal{L}/\sqrt{g}$ beschriebenen physikalischen Systems (das Gravitationsfeld selbst ausgenommen) in einem Gravitationsfeld mit dem in (6.57) definierten symmetrischen und divergenzfreien Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}}\frac{\delta(\sqrt{g}L)}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{6.62}$$

zu identifizieren.
Wir wollen diese plausible Schlußfolgerung durch Vergleich mit dem bekannten Energie-Impuls-Tensor des freien elektromagentischen Feldes (6.42) rechtfertigen. Zunächst gilt mit (5.16) für die Variation von $\sqrt{g}$

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{6.63}$$

Wegen $g^{\mu\varrho}g_{\varrho\sigma} = \delta^\mu_\sigma$ sind die Variationen $\delta g_{\varrho\sigma}$ und $\delta^{\mu\varrho}$ durch

$$\delta g^{\mu\varrho}g_{\varrho\sigma} + g^{\mu\varrho}\delta g_{\varrho\sigma} = 0 \tag{6.64}$$

miteinander verbunden. Nach Multiplikation mit $g^{\nu\sigma}$ folgt die Bedingung

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\varrho}g^{\nu\sigma}\delta g_{\varrho\sigma} \quad . \tag{6.65}$$

Man hat daher beim Übergang von $\delta g_{\mu\nu}$ zu $\delta g^{\mu\nu}$ auf die Änderung des Vorzeichens zu achten und erhält

$$\delta\sqrt{g} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \quad . \tag{6.66}$$

Die Lagrange-Funktion des elektromagnetischen Feldes lautet (vgl. (6.36))

$$L = -\frac{1}{16\pi}F_{\alpha\beta}F_{\lambda\varrho}g^{\lambda\alpha}g^{\varrho\beta} \quad . \tag{6.67}$$

Da L von den Ableitungen des metrischen Tensors nicht abhängt, wird die Rechnung einfach und man erhält bei Anwendung der Produktregel

$$\frac{\delta(\sqrt{g}L)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial(\sqrt{g}L)}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{\mu\nu}L + \frac{1}{8\pi}\sqrt{g}F_{\mu\lambda}F^{\lambda\nu} \quad . \tag{6.68}$$

Nach der Definition (6.62) folgt damit

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}\left[F_{\mu\lambda}F^{\lambda}{}_{\nu} + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] \quad . \tag{6.69}$$

Dieser Tensor stimmt mit dem bekannten Energie-Impuls-Tensor des elektromagnetischen Feldes (6.42) überein. Die allgemeine Definition (6.62) ist somit (ohne zusätzlichen Faktor) gerechtfertigt. Ergänzend sei bemerkt, daß diese Methode auch zur Bestimmung des Energie-Impuls-Tensors im flachen Raum (ohne Gravitationsfeld) geeignet ist. Die dabei eingeführten krummlinigen Koordinaten werden dann mit $g^{\mu\nu}$ als formales Hilfsmittel in der Rechnung benutzt.
Als weiteres Beispiel betrachten wir ein freies skalares Feld $\varphi(x)$ der Masse m. Die Lagrange-Funktion für das reelle Feld φ lautet

$$L = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu}\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - m^2\varphi^2\right) \quad . \tag{6.70}$$

Die zugehörige Feldgleichung folgt bei Variation des Wirkungsintegrals (6.47) nach φ

$$\frac{\partial(\sqrt{g}L)}{\partial\varphi} - \partial^\mu\left(\frac{\partial(\sqrt{g}L)}{\partial\varphi^{,\mu}}\right) = -m^2\sqrt{g}\varphi - \partial^\mu\left(\sqrt{g}g_{\mu\nu}\partial^\nu\varphi\right) = 0 \quad .$$

Da φ ein Skalar ist, können wir $\varphi_{,\mu} = \varphi_{;\mu}$ setzen und erhalten nach Division durch $\sqrt{g}$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu\left(\sqrt{g}\varphi^{;\mu}\right) + m^2\varphi = 0$$

und mit (5.22) schließlich

$$\varphi^{;\mu}{}_{;\mu} + m^2\varphi = 0 \quad . \tag{6.71}$$

Dies ist, wie erwartet, die Klein-Gordon-Gleichung in allgemein kovarianter Form.
Den Energie-Impuls-Tensor gewinnen wir aus der Variationsableitung von $\mathcal{L} = \sqrt{g}L$ nach $\delta g^{\mu\nu}$. Mit (6.66) findet man

$$\frac{\delta(\sqrt{g}L)}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial(\sqrt{g}L)}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\sqrt{g}g_{\mu\nu}L + \frac{1}{2}\sqrt{g}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi$$

und die Definition (6.62) ergibt dann den Energie-Impuls-Tensor für das skalare Feld φ

$$T_{\mu\nu} = \varphi_{,\mu}\varphi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\left(g^{\alpha\beta}\partial_\alpha\varphi\partial_\beta\varphi - m^2\varphi^2\right) \quad . \tag{6.72}$$

Im lokalen Inertialsystem geht dieser Tensor in den bekannten speziell relativistischen Ausdruck über. Dieses Verfahren ist zur Berechnung des divergenzfreien symmetrischen Energie-Impuls-Tensors besonders geeignet.

6.6 Killing-Vektoren und Erhaltungssätze

Kehren wir nun zur Transformation (6.48) zurück. Für den Fall, daß sich dabei die Metrik nicht ändert, also $\delta g^{\mu\nu} = 0$ ist, geht (6.56) über in die Bedingung

$$\xi^\mu{}_{;\lambda}g^{\lambda\nu} + \xi^\nu{}_{;\lambda}g^{\lambda\mu} = 0 \quad . \tag{6.73}$$

Diese Gleichung heißt Killing-Gleichung, die Lösungen $\xi^\mu(x)$ Killing-Vektoren. Wenn Lösungen $\xi^\mu(x)$ der Killing-Gleichung existieren, dann beschreibt die Transformation (6.48) eine isometrische Abbildung der Raum-Zeit auf sich. Wir können diese Abbildung auch als Bewegung (z.B. Rotation) des Riemannschen Raumes deuten, denn man bezeichnet gerade solche Transformationen als Bewegungen (Verlagerungen), bei denen die Metrik nicht geändert wird. Die isometrischen Transformationen bilden eine Gruppe, die sogenannte Bewegungsgruppe. Nur bei vorhandener Symmetrie besitzt die Killing-Gleichung Lösungen. Für einen beliebigen Riemannschen Raum braucht keine Lösung der Killing-Gleichung zu existieren.
Betrachten wir als besonders einfaches Beispiel den speziellen Fall des Minkowski-Raumes. Die Killing-Gleichung geht dann über in

$$\xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} = 0 \tag{6.74}$$

mit der von 10 Parametern abhängigen allgemeinen Lösung

$$\xi_\mu(x) = a_\mu + \varepsilon_{\mu\nu}x^\nu \ , \ \varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu} \quad . \tag{6.75}$$

Offensichtlich entspricht diese Lösung gerade den Transformationen der Poincaré-Gruppe.

Als zweites Beispiel betrachten wir ein Gravitationsfeld, das einen zeitartigen Killing-Vektor $\xi_\mu \xi^\mu > 0$ zuläßt. Wir wählen die Koordinaten so, daß ξ^μ die einfache Form annimmt $\xi^\mu = (1,0,0,0)$. Die rechte Seite der Gleichung (6.55) ist mit der Bedingung $\delta g^{\mu\nu} = 0$ nur dann erfüllt, wenn

$$\frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^0} = 0 \tag{6.76}$$

gilt. In dem gewählten Koordinatensystem sind demnach alle Komponenten des metrischen Tensors von x^0 unabhängig. Ein Gravitationsfeld mit dieser Eigenschaft heißt stationär. Wenn zusätzlich $g_{0n} = 0$ gilt, wird das zeitunabhängige Gravitationsfeld statisch genannt. In diesem Fall sind die beiden Zeitrichtungen äquivalent, denn das Linienelement $\mathrm{d}s$ ändert sich bei einem Vorzeichenwechsel von x^0 nicht, weil die raumzeitlichen Terme $\mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^n$ fehlen. Geometrisch bedeutet dies, daß bei statischen Feldern der zeitartige Killing-Vektor orthogonal zur Hyperfläche $x^0 = \mathrm{const}$ ist.
Man beachte jedoch, daß der ein zeitunabhängiges Gravitationsfeld erzeugende Körper nicht notwendig bewegungslos sein muß. So ist z.B. das Feld eines gleichmäßig um seine Achse rotierenden axialsymmetrischen Körpers zeitunabhängig. Bei einem Vorzeichenwechsel von x^0 ändert sich jedoch das Vorzeichen der Drehgeschwindigkeit. Die Richtungen der Zeitkoordinate sind nicht mehr gleichwertig. Das zugehörige Gravitationsfeld ist daher nicht statisch sondern stationär.
In einem gegebenen Gravitationsfeld gilt für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor eines physikalischen Systems (einer Feld- bzw. Materieverteilung) der lokale Erhaltungssatz (6.61). Diese Gleichung lautet explizit

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\varrho\nu} T^{\varrho\nu} + \Gamma^{\nu}_{\varrho\nu} T^{\mu\varrho} = 0 \quad . \tag{6.77}$$

Der erste und letzte Term führen zusammengefaßt mit (5.17) auf

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} T^{\mu\nu}\right)_{,\nu} + \Gamma^{\mu}_{\varrho\nu} T^{\varrho\nu} = 0 \quad . \tag{6.78}$$

Der Satz von Gauss kann nur auf den ersten Summanden angewendet werden. Somit verhindert der von dem Gravitationsfeld herrührende zweite Term die Gültigkeit eines integralen Erhaltungssatzes. Wenn jedoch das Raum-Zeit-Kontinuum Symmetrien, d.h. eine Bewegungsgruppe besitzt, hat dies einen integralen Erhaltungssatz zur Folge. Der zur Bewegungsgruppe gehörende Killing-Vektor ξ_μ erfüllt die Gleichung (6.73). Daher verschwindet dann auch wegen $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ und der Symmetrie von $T^{\mu\nu}$ die Divergenz des mit ξ_μ gebildeten Vektors $T^{\mu\nu}\xi_\mu$, d.h. mit (5.20) können wir schreiben

$$\left(T^{\mu\nu}\xi_\mu\right)_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\sqrt{g} T^{\mu\nu}\xi_\mu\right)_{,\nu} = 0 \quad . \tag{6.79}$$

Wir integrieren diese Gleichung über ein dreidimensionales Volumen, auf dessen Begrenzung $T^{\mu\nu}$ verschwindet

$$\int \left(T^{\mu\nu}\xi_\mu\right)_{;\nu} \sqrt{g}\mathrm{d}^3x = \int \left(\sqrt{g} T^{\mu 0}\xi_\mu\right)_{,0} \mathrm{d}^3x + \int \left(\sqrt{g} T^{\mu n}\xi_\mu\right)_{,n} \mathrm{d}^3x = 0 \quad . \tag{6.80}$$

Nach dem Satz von Gauss kann man den zweiten Summanden in ein Integral über die begrenzende Oberfläche überführen, das wegen $T^{\mu\nu} = 0$ auf der Begrenzung keinen Beitrag liefert. Das verbleibende Integral ist daher zeitlich konstant, d.h. es gilt der Erhaltungssatz

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int \sqrt{g} T^{\mu 0} \xi_\mu \mathrm{d}^3 x = 0 \quad . \tag{6.81}$$

Die Bewegung eines kräftefreien Massenpunktes erfolgt im Riemannschen Raum auf einer Geodäten

$$\frac{\mathrm{D}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = 0 \quad . \tag{6.82}$$

Nehmen wir an, daß ein Killing-Vektorfeld ξ_μ existiert. Dann bleibt die skalare Größe $\xi_\mu u^\mu$ konstant. Zum Beweis überschiebt man (6.82) mit dem ξ_μ und erhält

$$\xi_\mu \frac{\mathrm{D}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} (\xi_\mu u^\mu) - u^\mu \xi_{\mu;\nu} u^\nu = 0 \quad . \tag{6.83}$$

Wegen der Antisymmetrie von $\xi_{\mu;\nu}$ (vergl. die Killing-Gl. (6.73)) liefert der zweite Summand keinen Beitrag, und es folgt

$$\xi_\mu u^\mu = \mathrm{const} \quad . \tag{6.84}$$

Das innere Produkt eines Killing-Vektors mit dem Geschwindigkeitsvektor eines Teilchens bleibt also bei der Bewegung auf einer Geodäten konstant. Jeder Killing-Vektor einer Symmetriegruppe führt somit auf eine Erhaltungsgröße . Diese sind bei der Integration der Geodätengleichung nützlich.

Abschließend sei darauf hingewiesen, daß für einen vierdimensionalen Raum konstanter Krümmung zehn Killing-Vektoren existieren, die den vier Translations- und den sechs Rotationssymmetrien entsprechen.

Kapitel 10

Gravitationswellen

Die Frage nach der Existenz von Gravitationswellen stellt ein besonders interessantes Problem dar. In Analogie zur Elektrodynamik sollten die Einsteinschen Feldgleichungen Lösungen zulassen, die sich als freie Gravitationsfelder mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die mögliche Existenz von Gravitationswellen wurde bereits von Einstein (1918) mit Hilfe genäherter Lösungen der linearisierten Feldgleichungen untersucht. Demnach werden Gravitationswellen von einem System beschleunigter Massen erzeugt, ähnlich wie elektromagnetische Wellen durch beschleunigte Ladungen. Im Unterschied zur Elektrodynamik besitzen aber die Quellen der Gravitation, die Massenverteilungen, nur ein Vorzeichen. Daher kann es keine gravitativen Dipole geben, d.h. die Gravitationsstrahlung ist in niedrigster Ordnung eine Quadrupolstrahlung.[1]
Gravitationswellen merklicher Stärke können entstehen, wenn große Massen sich sehr schnell bewegen. Dies geschieht z.B. beim Gravitationskollaps oder beim Supernovaausbruch eines Sternes. Neben der relativen Seltenheit solcher Ereignisse in nicht zu weiter Entfernung ist die auf der Erde zu empfangende Intensität gering und deren Messung dementsprechend schwierig. Die bisher seit den sechziger Jahren durchgeführten Experimente haben zu keinem positiven Ergebnis geführt. Aber man geht davon aus, daß die notwendige Empfindlichkeit bei den im Aufbau bzw. in der Erprobung befindlichen verbesserten Experimenten in absehbarer Zeit erreicht werden kann.
Als indirekter Nachweis der Gravitationsstrahlung kann die Abnahme der Bahnperiode des Doppelsternsystems PSR 1913+16 angesehen werden, das aus einem Pulsar und einem nicht sichtbaren Begleiter besteht. Die genauen Messungen an diesem System über Jahre hinweg ergeben, daß die Gravitationsabstrahlung, wie sie nach der Quadrupolformel erfolgt, bei Erwägung anderer denkbarer Effekte, die einzige plausible Erklärung für den Energieverlust des Systems und die damit verbundene Abnahme der Bahnperiode ist.[2]
Gravitationswellen bilden die Verbindung zu dem in der Quantentheorie der Felder eta-

[1] Die Abwesenheit von Monopolstrahlung folgt aus dem Birkhoff-Theorem, wonach bei kugelsymmetrischen Quellen die Lösungen im Außenraum statisch sind.

[2] Die gemessene Abnahme der Bahnperiode entspricht bis auf drei Promille der theoretischen Vorhersage. Interessant ist außerdem folgendes Ergebnis. Der bei diesem System gemessene Wert der Periheldrehung bestätigt bis auf weniger als ein Promille genau die Vorhersage der Relativitätstheorie.

blierten Teilchenbild und sind daher auch aus theoretischer Sicht von grundlegender Bedeutung. Hier kann die Elektrodynamik ebenfalls als Beispiel herangezogen werden, die in der quantentheoretischen Formulierung zwangsläufig zu der Teilcheninterpretation durch Photonen führt. Bei einem klassischen Feld, dem in der Quantentheorie Teilchen mit ganzzahligem Spin s entsprechen, dominiert offenbar die $2s$-polstrahlung. Geht man von dieser für Photonen (Dipol, Spin 1) gültigen Regel aus, dann sind im Teilchenbild der Gravitationswellen (Quadrupol) für die Gravitonen der Spin 2 zu erwarten.
Da die Einsteinschen Feldgleichungen nichtlinear sind, gilt das in der Elektrodynamik verwendete Superpositionsprinzip hier nicht mehr. Die damit verbunden Schwierigkeiten beim Auffinden strenger Wellenlösungen, die einer realen physikalischen Situation entsprechen, führen zwangsläufig dazu, daß man die Feldgleichungen durch mathematisch leichter zugängliche lineare Differentialgleichungen (Wellengleichungen) annähert. Dies ist unter der Voraussetzung relativ schwacher Felder möglich. Die Näherung schwacher Felder entspricht aber auch der realen Situation insofern bei den in der Fernzone, d.h. in großer Entfernung vom Entstehungsort, beobachtbaren Gravitationswellen nur geringe Intensitäten zu erwarten sind. Außerdem erhält der Begriff eines Elementarteilchens seine präzise Bedeutung erst im asymptotischen Bereich, d.h. fern von allen anderen Teilchen. Im Fall des Gravitons entspricht dies einer Lösung der Feldgleichungen in der Fernzone, wo die Felder schwach sind. Es ist daher sinnvoll, von schwachen Feldern und somit von den linearisierten Feldgleichungen auszugehen.

10.1 Die Feldgleichungen in linearer Näherung

Wir gehen aus von dem bereits früher in Gl. (7.25) eingeführten linearen Ansatzes

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) + \mathcal{O}(h^2) \quad , \tag{10.1}$$

der wegen $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ nur geringe Abweichungen von der Minkowskischen Metrik $\eta_{\mu\nu}$ beschreibt und als Näherung im Fall schwacher Gravitationsfelder gilt. Beim Rechnen in der linearen Näherung sind folgende Regeln zu beachten. Da wir $h_{\mu\nu}$ sowie deren ersten und höheren Ableitungen als klein annehmen, können alle ihre Produkte vernachlässigt werden. Das Heben und Senken der Indizes erfolgt in dieser Näherung dann mit $\eta^{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}$ statt mit $g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$, und die Bedingung $g_{\mu\lambda}g^{\lambda\nu} = \delta_\mu^\nu$ wird mit

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} \tag{10.2}$$

erfüllt. Da $\eta_{\mu\nu}$ konstant ist, können wir den Ausdruck für die Christoffel-Symbole in der linearen Näherung aus (5.14) ablesen

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\varrho}\left(h_{\varrho\nu,\mu} + h_{\varrho\mu,\nu} - h_{\mu\nu,\varrho}\right) \quad . \tag{10.3}$$

Entsprechend erhält man aus (5.28) bei Vernachlässigung der in Γ quadratischen Terme den Riemann-Tensor in linearer Näherung

$$R_{\alpha\mu\nu\beta} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\nu,\beta\alpha} - h_{\alpha\nu,\mu\beta} - h_{\mu\beta,\nu\alpha} + h_{\alpha\beta,\mu\nu}\right) \quad . \tag{10.4}$$

Daraus folgt unmittelbar der Ricci-Tensor

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}\left(h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h^{\alpha}{}_{\nu,\mu\alpha} - h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h^{\alpha}{}_{\alpha,\mu\nu}\right) \quad . \tag{10.5}$$

Führt man statt $h_{\mu\nu}$ die folgenden Feldfunktionen ein

$$\Phi_{\mu}{}^{\alpha} := h_{\mu}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\mu}{}^{\alpha}h \ , \ h = h^{\alpha}{}_{\alpha} \quad , \tag{10.6}$$

dann kann der Ricci-Tensor in der für die folgenden Betrachtungen zweckmäßigen Form geschrieben werden

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\left(\Phi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha\nu} + \Phi_{\nu}{}^{\beta}{}_{,\beta\mu}\right) \quad . \tag{10.7}$$

Die noch aufzustellenden linearen Feldgleichungen werden einfacher, wenn man die Invarianz der Feldgleichungen gegenüber Koordinatentransformationen ausnutzt. Im Rahmen der linearen Näherung sind aber nur kleine Abweichungen von den Minkowski-Koordinaten zugelassen, wie wir sie von den Ausführungen in Abschnitt 6.5 bereits kennen. Wir ändern also die Koordinaten durch die Transformation

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \xi^{\mu}\left(x^{a}\right) \quad , \tag{10.8}$$

wobei die Funktionen $\xi^{\mu}\left(x^{a}\right)$ und deren Ableitungen von gleicher Ordnung klein wie die $|h_{\mu\nu}|$ sein sollen.
Nach dem Transformationsgesetz

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\nu'}}g_{\alpha\beta} = \left(\delta^{\alpha}{}_{\mu} - \xi^{\alpha}{}_{,\mu}\right)\left(\delta^{\beta}{}_{\nu} - \xi^{\beta}{}_{,\nu}\right)g_{\alpha\beta} \tag{10.9}$$

folgt für den genäherten metrischen Tensor (10.1)

$$g_{\mu\prime\nu\prime} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad . \tag{10.10}$$

Bei der Transformation (10.8) gehen demnach die Gravitationspotentiale in der linearen Näherung über in

$$h_{\mu\nu} \to \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad . \tag{10.11}$$

Die transformierte Größe $\bar{h}_{\mu\nu}$ ist ebenfalls nur eine kleine Störung von $\eta_{\mu\nu}$. Wie man durch Einsetzen von (10.11) in (10.4) leicht nachrechnet, ändert sich der Krümmungstensor bei der Transformation nicht. Die physikalischen Aussagen bleiben beim Übergang $h_{\mu\nu} \to \bar{h}_{\mu\nu}$ ungeändert. Die Potentiale $h_{\mu\nu}$ und $\bar{h}_{\mu\nu}$ sind in ihrer Wirkung gleichwertig. Die linearisierte Gravitationstheorie besitzt demnach die durch (10.11) definierte Eichfreiheit, in enger Analogie zu der in der Elektrodynamik, wo der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ bei der Umeichung der Potentiale $A_{\mu} \to A_{\mu} + \partial_{\mu}\varphi$ nicht geändert wird. Wie in der Elektrodynamik können wir daher auch hier durch die Wahl einer bestimmten Eichung die linearisierten Feldgleichungen vereinfachen.

Zunächst folgt aus (10.11)

$$h \to \bar{h} = h - 2\xi^{\mu}{}_{,\mu} \quad . \tag{10.12}$$

Damit und mit (10.11) gehen die in (10.6) eingeführten Feldfunktionen $\Phi_{\mu}{}^{\alpha}$ über in

$$\bar{\Phi}_{\mu}{}^{\alpha} = \Phi_{\mu}{}^{\alpha} - \xi_{\mu}{}^{,\alpha} - \xi^{\alpha}{}_{,\mu} + \delta_{\mu}{}^{\alpha}\xi^{\nu}{}_{,\nu} \quad . \tag{10.13}$$

Die Ableitungen hiervon, die im Ricci-Tensor vorkommen, ergeben

$$\bar{\Phi}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = \Phi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} - \xi_{\mu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} \quad . \tag{10.14}$$

Wenn in den ursprünglichen Koordinaten $\Phi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} \neq 0$ ist, kann man wegen der Eichfreiheit das Vektorfeld ξ^{μ} so wählen, daß die folgende Bedingung erfüllt ist

$$\Phi_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = \xi_{\mu}{}^{,\alpha}{}_{\alpha} \equiv \Box\xi_{\mu} \quad . \tag{10.15}$$

Hier bezeichnet $\Box := \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta}$ den d'Alembert-Operator. Bei der so festgelegten Eichtransformation gilt dann in den neuen Koordinaten

$$\bar{\Phi}_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad . \tag{10.16}$$

Mit dieser Bedingung sind die neuen Koordinaten und damit die Potentiale $\bar{\Phi}_{\mu\nu}$ nicht eindeutig bestimmt. Führt etwa eine weitere Eichtransformation $x^{\mu} \to x^{\mu} + \xi^{\mu}$ aus, deren erzeugendes Vektorfeld ξ^{μ} die Bedingung $\Box\xi^{\mu} = 0$ erfüllt, dann wird dabei die Eichbedingung (10.16) nicht geändert. Es sei daran erinnert, daß bei den Eichtransformationen in der Elektrodynamik eine entsprechende Mehrdeutigkeit vorkommt.
Fordern wir also nach Ausführung einer Eichtransformation die Bedingung (10.16), dann erhalten wir für den Ricci-Tensor und den Krümmungsskalar $R = R^{\mu}{}_{\mu}$ die einfachen Ausdrücke (Striche fortgelassen)

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \ , \ R = \frac{1}{2}\Box h \quad . \tag{10.17}$$

Der Einstein-Tensor (7.1) wird damit

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Box\Phi_{\mu\nu} \quad , \tag{10.18}$$

und es folgen die so vereinfachten linearen Feldgleichungen

$$\Box\Phi_{\mu\nu} = 2\kappa T_{\mu\nu} \quad . \tag{10.19}$$

Durch Spurbildung erhält man daraus die andere Form (vergl. (7.3)) der linearisierten Feldgleichungen

$$\Box h_{\mu\nu} = -2\kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) \quad . \tag{10.20}$$

Zusammenfassend stellen wir nochmals fest: Die Funktionen $\Phi_{\mu\nu}$ genügen den linearen Feldgleichungen (10.19), vorausgesetzt die Eichbedingung (10.16) ist erfüllt. Damit

sind die Feldfunktionen $\Phi_{\mu\nu}$ nicht eindeutig festgelegt. Man kann immer noch umeichen, ohne die Bedingung (10.16) zu verletzen, wobei das erzeugende Vektorfeld ξ^μ der homogenen Wellengleichung $\Box\xi^\mu = 0$ genügen muß. Die Bedingung (10.16) wird Hilbert-Eichung oder auch harmonische Eichung genannt. Sie entspricht der Lorentz-Eichung in der Elektrodynamik.
Da die Lösungen der linearisierten Feldgleichungen die Eichbedingung

$$\eta^{\alpha\nu}\Phi_{\mu\nu,\alpha} = 0 \tag{10.21}$$

erfüllen müssen, folgt eindeutig aus (10.19) auch

$$\eta^{\alpha\nu}T_{\mu\nu,\alpha} = 0 \quad . \tag{10.22}$$

Dies ist der Ausdruck für die Erhaltung von Energie und Impuls der Materie ohne Einbeziehung der Gravitation. Im Vakuum ($T_{\mu\nu} = 0$) gelten die homogenen Feldgleichungen

$$\Box\Phi_{\mu\nu} = 0 \tag{10.23}$$

mit der Nebenbedingung (10.21). Hieraus ist zu entnehmen, daß schwache gravitative Störungen sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den leeren Raum ausbreiten. Ein Massenterm kommt in (10.23) nicht vor.
Die tensorielle Wellengleichung (10.23) beschreibt ein masseloses Feld mit Spin 2.[3] In der linearen Näherung wird demnach die Allgemeine Relativitätstheorie auf die Theorie eines masselosen Feldes mit Spin 2 reduziert. Es liegt nahe, diese Deutung zu verallgemeinern indem man die allgemeine Theorie als die eines masselosen Spin-2-Feldes mit nichtlinearer Selbstwechselwirkung betrachtet. Hierbei sollte jedoch folgender Vorbehalt beachtet werden. Die hier benutzten Begriffe Masse und Spin eines Feldes erfordern, wie wir gesehen haben, eine flache Hintergrundmetrik $\eta_{\mu\nu}$, die nur in der linearen Näherung, nicht aber in der vollständigen Theorie vorkommt. Außerhalb der linearen Näherung verlieren diese Begriffe ihre präzise Bedeutung.
Spezielle Lösungen der linearisierten Feldgleichungen (10.19) kann man sofort angeben. Da jede ihrer Komponenten die gleiche Struktur wie die entkoppelten Wellengleichungen für die elektromagnetischen Potentiale A_μ hat, können wir die aus der Elektrodynamik bekannte quellenmäßige Darstellung in der Form von retardierten Potentialen auch hier anwenden. Für eine im Volumen V vorgegebene Materie-Energieverteilung erhalten wir so die Lösung der Wellengleichung (10.19) in der Form

$$\Phi_{\mu\nu}(\vec{x},t) = -\frac{\kappa}{2\pi}\int_V \mathrm{d}^3x' \frac{T_{\mu\nu}(\vec{x}',t')}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \quad , \tag{10.24}$$

wobei im Argument von $T_{\mu\nu}$ die retardierte Zeit $t' = t - |\vec{x}-\vec{x}'|/c$ steht.

10.2 Ebene Wellen

Wir betrachten nun die einfachsten Lösungen der linearisierten homogenen Feldgleichungen, die ebenen Gravitationswellen. In der linearen Näherung erhält man durch

[3] Dies ist seit langer Zeit bekannt: M. Fierz u. W. Pauli, Proc. Roy. Soc. London **A173**, 211 (1939).

Superposition ebener Wellen allgemeine Lösungen. Auch kann man die Gravitationswellen in der Fernzone durch ebene Wellen approximieren.

Elektromagnetische Wellen

Zur Einführung ist es nützlich, an die Polarisationszustände ebener Wellen in der Elektrodynamik zu erinnern. Die Feldgleichungen für die Potentiale A^μ lauten in der Lorentz-Eichung

$$\Box A^\mu = \frac{4\pi}{c} j^\mu \quad , \; A^\mu{}_{,\mu} = 0 \tag{10.25}$$

d.h. im quellenfreien Raum ($j^\mu = 0$)

$$\Box A^\mu = 0 \quad . \tag{10.26}$$

Wir schreiben die ebenen Wellen in komplexer Form ($k \cdot x \equiv k_\mu x^\mu$)

$$A^\mu = \mathrm{Re}\left[a^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right] \quad , \tag{10.27}$$

wobei der Polarisationsvektor a^μ konstant ist und $k^\mu = (\omega/c, \vec{k})$ den Wellenvektor bezeichnet. Nur die reellen Lösungen sind zu berücksichtigen. Das hierfür verwendete Zeichen Re werden wir künftig der Einfachheit halber unterdrücken. Die ebenen Wellen sind Lösungen der homogenen Differentialgleichungen (10.26) und genügen der Eichbedingung, wenn

$$k_\mu k^\mu = 0 \;\; , \;\; k_\mu a^\mu = 0 \tag{10.28}$$

erfüllt ist. Die Eichbedingung reduziert die 4 Komponenten von a^μ auf 3. Ohne Änderung der Feldstärken und ohne die Lorentz-Eichung zu verletzen, können wir A^μ durch eine Eichtransformation ändern

$$A^\mu \to \bar{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \varphi \quad . \tag{10.29}$$

Dabei muß $\Box\varphi = 0$ erfüllt sein. Mit

$$\varphi = \mathrm{i}\varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$$

erhält man die transformierten Potentiale

$$\bar{A}^\mu = \bar{a}^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \;\; , \; \bar{a}^\mu = a^\mu - \varepsilon k^\mu \quad . \tag{10.30}$$

Da der Parameter ε noch frei wählbar ist, können von den drei unabhängigen Komponenten von a^μ nur zwei physikalische Bedeutung haben. Um diese beiden wesentlichen Komponenten zu identifizieren, betrachten wir eine ebene Welle, die sich in der x^3-Richtung ausbreitet. In diesem Fall sind die Komponenten des Wellenvektors $k^1 = k^2 = 0$, $k^3 = k^0 > 0$. Aus der Bedingung $k_\mu a^\mu$ folgt zunächst mit $k_\mu = (k, 0, 0, -k)$

$$a^0 = a^3 \quad . \tag{10.31}$$

Die Eichtransformation (10.30) läßt a^1 und a^2 ungeändert, überführt aber a^3 in

$$\bar{a}^3 = a^3 - \varepsilon k \quad . \tag{10.32}$$

Daher kann man durch die Wahl $\varepsilon = a^3/k$ die Komponente $\bar{a}^3$ (und damit auch $\bar{a}^0$) zum Verschwinden bringen, so daß nur die Komponenten a^1 und a^2 übrig bleiben. Der Polarisationsvektor hat also nur zwei bedeutsame Komponenten, die voneinander unabhängig sind. Diese entsprechen den beiden zueinander orthogonalen transversalen Schwingungsmoden, a^1 in x^1-Richtung und a^2 in x^2-Richtung. Führt man die beiden Einheitsvektoren der Polarisation $e_1^\mu = \delta_1^\mu$ und $e_2^\mu = \delta_2^\mu$ ein, so erhält man durch deren Überlagerung die Polarisationsvektoren

$$a_\pm^\mu = \alpha \left(e_1^\mu \pm \mathrm{i} e_2^\mu \right) \quad , \tag{10.33}$$

die zirkular polarisierte Wellen beschreiben. Diese entsprechen den beiden möglichen Helizitätszuständen ± 1.

Der Begriff der Helizität wird zur Beschreibung des Drehsinns einer Welle (eines Teilchens) benutzt. Die Helizität ist in der Quantentheorie als Eigenwert der Projektion des Spinoperators auf die Richtung des Impulses definiert $\Lambda \equiv \vec{s} \cdot \vec{p}/|\vec{p}|$. Der Spinoperator ist der erzeugende Operator bei räumlichen Drehungen und daher Λ erzeugender Operator der Drehungen um die Richtung des Impulses, d.h. hier des Wellenvektors. Stellt man also fest, daß eine zirkular polarisierte ebene Welle ψ bei einer Drehung um die Ausbreitungsrichtung in

$$\psi' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\theta} \psi \tag{10.34}$$

transformiert wird, dann ist offenbar ψ Eigenzustand des Operators der endlichen Drehung $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Lambda\theta}$ mit der Helizität λ als Eigenwert. Der höchste Eigenwert λ ergibt den Spin mit den möglichen Spinstellungen $\lambda, \lambda - 1, \ldots, -\lambda$. Wenden wir nun eine Drehung um die x^3-Achse auf die Polarisationsvektoren (10.33) an

$$a'^\mu_\pm = R^\mu{}_\nu a^\nu_\pm \ , \ R^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \tag{10.35}$$

dann folgt

$$a'^\mu_\pm = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta} a^\mu_\pm \quad . \tag{10.36}$$

Die zirkular polarisierten ebenen elektromagnetischen Wellen besitzen also die Helizitäten ± 1. In der quantisierten Theorie bedeutet dies, daß Photonen den Spin 1 haben (genauer $\hbar$) mit den beiden Spinstellungen $\pm\hbar$ in der Ausbreitungsrichtung.

Gravitationswellen

Wir kehren nun zu den Gravitationswellen zurück und behandeln sie analog zu den ebenen Wellen in der Elektrodynamik. Im quellenfreien Raum ($T_{\mu\nu} = 0$) folgen nach (10.20) für $h_{\mu\nu}$ die freien (homogenen) Gleichungen

$$\Box h^{\mu\nu} = 0 \quad , \tag{10.37}$$

deren Lösungen in der Hilbert-Eichung (10.21) die Bedingung

$$h^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = \frac{1}{2} h^{,\mu} \tag{10.38}$$

erfüllen müssen. Wir schreiben die ebene Welle wieder in komplexer Form

$$h^{\mu\nu} = \mathrm{Re}\left[A^{\mu\nu} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}\right] \tag{10.39}$$

und werden die Bezeichnung für den Realteil (Re) künftig fortlassen. Sie erfüllt die Wellengleichung und die Eichbedingung (10.38), wenn k^μ ein Nullvektor ist

$$k^\mu k_\mu = 0 \tag{10.40}$$

und

$$A^{\mu\alpha} k_\alpha = \frac{1}{2} A k^\mu \ , \ A = A^\nu{}_\nu \tag{10.41}$$

gilt. Der Polarisationstensor $A^{\mu\nu}$ ist symmetrisch, hat also 10 Komponenten. Mit den 4 Bedingungen (10.41) verringert sich diese Zahl auf 6. In den verbleibenden Lösungen sind aber noch solche enthalten, für die der Krümmungstensor identisch verschwindet. Diese reinen Koordinatenwellen können aber durch eine geeignete Eichtransformation $x^{\mu'} = x' + \xi^\mu(x)$, $\Box \xi^\mu = 0$ eliminiert und die Zahl der unabhängigen Komponenten auf 2 reduziert werden. Die verbleibenden Komponenten stellen die beiden möglichen Polarisationen der ebenen Gravitationswelle dar.
Die ebene Welle möge sich z. B. in der x^3-Richtung fortpflanzen, so daß für den Wellenvektor gilt $k^\mu = (k, 0, 0, k)$, mit $k = \omega/c > 0$. Die Bedingung (10.41) ergibt dann im einzelnen (beachte $k_3 = -k$)

$$\begin{aligned} A^{00} - A^{03} &= \frac{1}{2} A \\ A^{10} - A^{13} &= 0 \\ A^{20} - A^{23} &= 0 \\ A^{30} - A^{33} &= \frac{1}{2} A \end{aligned} \tag{10.42}$$

Addiert man die letzte Gleichung zur ersten und berücksichtigt die Symmetrie von $A^{\mu\nu}$, dann folgt zunächst $A^{11} = -A^{22}$ und damit $A = A^{00} - A^{33}$. Mit Hilfe der obigen Relationen können die 10 Komponenten von $A^{\mu\nu}$ durch 6 ausgedrückt werden. Wir gehen von den folgenden Komponenten aus: A^{00}, A^{11}, A^{33}, A^{12}, A^{13} und A^{23}. Nach (10.42) erhalten wir für die übrigen 4 Komponenten

$$A^{10} = A^{13},\ A^{20} = A^{23},\ A^{30} = \frac{1}{2}\left(A^{00} + A^{33}\right),\ A^{22} = -A^{11} \quad . \tag{10.43}$$

Bei einer zusätzlichen Eichtransformation werden sich diejenigen Komponenten, die eine absolute physikalische Bedeutung haben, nicht ändern. Wir führen daher zur weiteren Reduzierung der Freiheitsgrade die Eichtransformation durch

$$\xi^\mu = -\mathrm{i}\varepsilon^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \ , \ \Box \xi^\mu = 0 \quad . \tag{10.44}$$

Wegen $\Box\xi^\mu = 0$ wird die frühere Eichbedingung nicht verletzt. Bei dieser Transformation gehen die Gravitationspotentiale $h^{\mu\nu}$ gemäß (10.11) in $\bar{h}^{\mu\nu}$ über und es folgt hiernach

$$\bar{A}^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} - \varepsilon^\mu k^\nu - \varepsilon^\nu k^\mu \quad . \tag{10.45}$$

Mit $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ erhält man daher für die 6 unabhängigen Komponenten

$$\begin{array}{ll} \bar{A}^{11} = A^{11} & \bar{A}^{12} = A^{12} \\ \bar{A}^{13} = A^{13} - \varepsilon^1 k & \bar{A}^{23} = A^{23} - \varepsilon^2 k \\ \bar{A}^{00} = A^{00} - 2\varepsilon^0 k & \bar{A}^{33} = A^{33} - 2\varepsilon^3 k \end{array} \tag{10.46}$$

Wir können nun die Parameter ε^μ der Eichtransformation so wählen, daß alle dabei geänderten Komponenten in (10.46) verschwinden. Nach der Transformation sind dann nur noch folgende Elemente des Polarisationstensors von Null verschieden

$$A^{11} = -A^{22}, \; A^{12} = A^{21} \quad . \tag{10.47}$$

Demnach kommt nur den beiden Komponenten A^{11} und A^{12} eine absolute (eichininvariante) physikalische Bedeutung zu. In dieser speziellen Eichung, die TT-Eichung (transverse traceless gauge) genannt wird, ist die Spur des Polarisationstensors gleich, und damit ist auch $h = h^\mu{}_\mu = 0$. Die beiden möglichen linearen Polarisationen der ebenen Welle sind durch $A^{12} = 0$, bzw. durch $A^{11} = 0$ bestimmt.
Wir führen analog zur Elektrodynamik zwei Polarisationstensoren $e_I^{\mu\nu}$ und $e_{II}^{\mu\nu}$ ein

$$e_I^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , e_{II}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{10.48}$$

Daraus entstehen, wie im Fall der elektromagnetischen Wellen, durch Superposition die beiden zirkular polarisierten Tensoren

$$A_\pm^{\mu\nu} = \alpha \left(e_I^{\mu\nu} \pm \mathrm{i} e_{II}^{\mu\nu} \right) \quad . \tag{10.49}$$

Wie bei den elektromagnetischen Wellen können wir sie durch ihre Helizität unterscheiden. Die Helizität (und damit der Spin) ermitteln wir aus der Änderung von $A^{\mu\nu}$ bei Drehung um die Ausbreitungsrichtung, hier die x^3-Achse, mit $R^\mu{}_\alpha$ aus (10.35)

$$A_\pm'^{\mu\nu} = R^\mu{}_\alpha R^\nu{}_\beta A_\pm^{\alpha\beta} \quad . \tag{10.50}$$

Die Rechnung ergibt, daß die physikalisch bedeutsamen Komponenten $A_\pm^{\mu\nu}$ die Helizitäten $\lambda = \pm 2$ haben. Die maximale Helizität ergibt den Wert des Spins. Beim Übergang von der klassischen zur Quantentheorie bedeutet dies, daß die entsprechenden Teilchen, die Gravitonen, den Spin 2 besitzen, mit den beiden Spinstellungen $\pm 2\hbar$ in der Ausbreitungsrichtung.
Sowohl beim Photon als auch beim Graviton stellt man nur zwei Spinrichtungen fest. Das folgt, wie wir gesehen haben, aus der Eichinvarianz, die bei diesen Feldern mit

ganzzahligem Spin ohne Massenterm in den Feldgleichungen gilt. Die Begrenzung auf zwei Spinstellungen ist somit letztlich auf die Tatsache zurückzuführen, daß die Teilchen keine Ruhmassen besitzen. Dies ist auch der Grund dafür, daß beide Wechselwirkungen eine große Reichweite haben, wie das in dem $1/r^2$-Gesetz zum Ausdruck kommt.

10.3 Teilchen im Feld der Gravitationswelle

Ebene Gravitationswellen sind zeitabhängige Störungen der Metrik mit zwei transversalen Moden, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Wir überzeugen uns zunächst davon, daß der Krümmungstensor die entsprechenden nichtverschwindenden Komponenten besitzt und fragen dann nach dem Verhalten von Probeteilchen im Feld der ebenen Welle.
Der Ausdruck für den Krümmungstensor in linearer Näherung (10.4) enthält die zweiten Ableitungen von $h_{\mu\nu}$, für die man im Fall der ebenen Wellen erhält

$$h_{\mu\nu,\alpha\beta} = -k_\alpha k_\beta h_{\mu\nu} \quad . \tag{10.51}$$

Benutzt man diese Beziehung in (10.4), dann ist leicht einzusehen, daß der Krümmungstensor nichtverschwindende Komponenten hat, die sich alle durch die zeitlichen Ableitungen der beiden transversalen Wellen h_{11} und h_{12} ausdrücken lassen

$$R_{m0n0} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 h_{mn}}{c^2 \mathrm{d}t^2} \ , \ m,n = 1,2 \quad . \tag{10.52}$$

Die von Null verschiedenen Komponenten sind ein absolutes (von den Koordinaten unabhängiges) Kriterium für die Existenz eines zeitabhängigen Gravitationsfeldes. Außerdem gilt mit (10.37) auch für den Krümmungstensor in der Form (10.4) die Wellengleichung

$$\Box R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \quad . \tag{10.53}$$

Wir betrachten nun die Wirkung der ebenen Gravitationswelle auf ein Probeteilchen, das keinen weiteren Kräften ausgesetzt ist. Ein freies Teilchen im Gravitationsfeld genügt der Geodätengleichung

$$\frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\varrho} u^\nu u^\varrho = 0 \ , \ u^\nu = \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \quad . \tag{10.54}$$

Für ein anfangs ruhendes Teilchen ist $u^0 = c$, $u^n = 0$. In der TT-Eichung sind nur die in (10.47) angegebenen Komponenten von Null verschieden. Für die Christoffel-Symbole folgt damit aus (10.3)

$$\Gamma^\mu_{00} = 0 \quad . \tag{10.55}$$

Berücksichtigt man dies in der Geodätengleichung (10.54), dann stellt man fest, daß sie mit den konstanten räumlichen Koordinaten

$$x^m = \mathrm{const} \ , \ x^0 = ct \tag{10.56}$$

erfüllt ist. Obwohl das bedeutet, daß die Koordinaten eines anfangs ruhenden Teilchens ($u^0 = c$, $u^n = 0$) sich nicht ändern, darf man nicht auf einen fehlenden physikalischen Effekt schließen. Wegen der Zeitabhängigkeit des metrischen Tensors $\eta_{mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ändern sich die relativen Abstände der Teilchen. Oder anders ausgedrückt, da bestimmte Komponenten des Krümmungstensors von Null verschieden sind (10.52), führt dies zu einer relativen Beschleunigung der Testteilchen.
Wir wollen auf die Änderung des Relativabstandes näher eingehen und betrachten zwei Teilchen auf der x-Achse, eines bei $x = a$, das andere bei $x = -a$. Infolge der Geodätengleichung bleibt das Koordinatenintervall zwischen den Teilchen konstant beim Wert $\Delta x = 2\alpha$. Aber der zu messende physikalische Abstand wird durch das räumliche Linienelement (6.7) bestimmt, das in der TT-Eichung lautet ($g_{0n} = 0$)

$$\mathrm{d}l^2 = -\left(\eta_{mn} + h_{mn}\right) \mathrm{d}x^m \mathrm{d}x^n \quad . \tag{10.57}$$

Berücksichtigt man (10.47), dann folgt daraus mit $(x^1, x^2, x^3) \equiv (x, y, z)$

$$\mathrm{d}l^2 = (1 - h_{11})\mathrm{d}x^2 + (1 + h_{11})\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 - 2h_{12}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad . \tag{10.58}$$

Die Abstände auf Parallelen zur Ausbreitungsrichtung (z-Achse) bleiben natürlich ungeändert weil die ebenen Wellen transversal sind. Da sie demnach von t und z, nicht aber von x und y abhängen, können wir die obige Relation direkt für endliche Bereiche anwenden und erhalten für den physikalischen Abstand der beiden Teilchen in x-Richtung

$$\Delta l_x^2 = (1 - h_{11})(2a)^2 \tag{10.59}$$

oder

$$\Delta l_x \simeq (1 - \frac{1}{2}h_{11})(2a) \quad . \tag{10.60}$$

Sei nun

$$h^{\mu\nu} = e_I^{\mu\nu} \alpha \cos\left(\omega t - kz\right) \tag{10.61}$$

die mit der Amplitude α in z-Richtung einfallende Gravitationswelle. Da nur Abstände in der x, y-Ebene geändert werden, können wir zur Vereinfachung $z = 0$ setzen und erhalten mit (10.48)

$$h^{11} = \alpha \cos \omega t \quad . \tag{10.62}$$

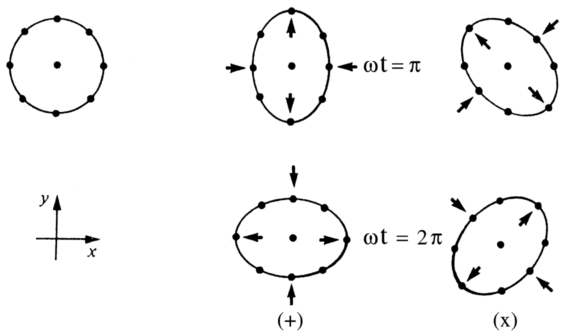
In (10.60) kommt jedoch die kovariante Komponente h_{11} vor. Daher ist wegen (10.2) ein Minuszeichen zu berücksichtigen, so daß der Abstand bestimmt ist durch

$$\Delta l_x = (1 + \frac{\alpha}{2} \cos \omega t)(2a) \quad . \tag{10.63}$$

Die Gravitationswelle bewirkt demnach eine Oszillation des Abstandes zwischen den Teilchen.
Für zwei auf der y-Achse bei $y = a$ bzw. $y = -a$ vorhandenen Teilchen, die der Gravitationswelle (10.61) ausgesetzt sind, variiert der Abstand gemäß

$$\Delta l_y = (1 - \frac{\alpha}{2} \cos \omega t)(2a) \quad . \tag{10.64}$$

Wegen der in (10.58) bereits berücksichtigten Relation $h_{11} = -h_{22}$ unterscheiden sich die Abstandsänderungen in den beiden Richtungen durch ein Vorzeichen. Wenn also der Abstand Δl in x-Richtung ein Maximum hat, ist in der y-Richtung ein Minimum vorhanden, und umgekehrt.
Zur Veranschaulichung des Effekts betrachten wir einen Ring von freien Probeteilchen in der xy-Ebene (mit Koordinatenabstand a vom Ursprung), der durch die Gravitationswelle (10.61) deformiert wird. In Figur 15 ist da Ergebnis schematisch dargestellt (Polarisation $(+)$). Daneben ist das entsprechende Ergebnis für die Welle vom Polarisationstyp II (Polarisation $(\times)$) gezeigt.



Figur 15: Deformation eines Ringes von Probeteilchen durch eine ebene Gravitationswelle vom Polarisationstyp I $(+)$, bzw. II $(\times)$.

Offensichtlich ist der einzige Unterschied zwischen den Abbildungen eine Rotation um 45°. Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß der Polarisationstensor $e^{\mu\nu}_{II}$ aus $e^{\mu\nu}_{I}$ durch eine solche Transformation hervorgeht (s. Aufgabe 31). Die beiden unabhängigen Polarisationsrichtungen I und II stehen also im Unterschied zu den elektromagnetischen Wellen nicht senkrecht aufeinander, sondern bilden im Fall der Quadrupolstrahlung einen Winkel von 45°. Wir können hier offenbar folgende allgemeine Regel ablesen. Ein Strahlungsfeld ($m = 0$) mit Spin s hat zwei unabhängige Zustände linearer Polarisation. Ihre Richtungen bilden einen Winkel von 90°/s. Dies trifft auch für Neutrinos mit dem Spin $1/2$ zu, deren zwei Spinstellungen entgegengesetzt (180°) gerichtet sind.
In Figur 16 sind schließlich die durch zirkular polarisierte Gravitationswellen (vergl. (10.49)) hervorgerufenen Deformationen dargestellt, die wir durch ihre Helizitäten un-

Figur 16: Deformation durch eine Gravitationswelle positiver Helizität (links), bzw. negativer Helizität (rechts). Im Fall positiver Helizität rotiert die Deformation entgegen dem Uhrzeigersinn, wobei die Welle auf den Beobachter zuläuft.

terscheiden können. Zu bemerken ist, daß in beiden Fällen natürlich nur die Deformationen (d.h. der Wulst) in der angegebenen Richtung rotiert. Der Ring der Teilchen rotiert nicht, die Teilchen schwingen nur um ihre Anfangslagen.
Wir können das Ergebnis der Gleichungen (10.63) und (10.64) so deuten: Unter Einfluß der ebenen Gravitationswelle oszillieren die Teilchen in gleicher Weise wie der Abstand zwischen ihnen. Sie erfahren dabei die Beschleunigung relativ zum Nullpunkt ($\Delta x = a$)

$$\frac{\mathrm{d}^2(\Delta l)}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\alpha}{2} a\omega^2 \cos\omega t \quad . \tag{10.65}$$

Diese Beschleunigung erhält man mit $h_{11} = -\alpha\cos\omega t$ auch aus der entsprechenden Komponente des Krümmungstensors (10.52)

$$c^2 a R_{1010} = -\frac{\alpha}{2} a\omega^2 \cos\omega t \quad . \tag{10.66}$$

Mit anderen Worten, die Gravitationswelle bewirkt Oszillationen des Krümmungstensors, die wegen der daraus folgenden Beschleunigung (10.66) zu entsprechenden periodischen Änderungen der relativen Abstände zwischen den Teilchen führen. Bei den Versuchen zum direkten Nachweis der Gravitationswellen geht man von der Messung dieser periodischen Abstandsänderungen aus.

10.4 Nachweis von Gravitationswellen

Die Versuche zum direkten Nachweis der durch Gravitationsstrahlung hervorgerufenen variablen Raummetrik beruhen auf den folgenden zwei Prinzipien. Bei den zuerst von Joseph Weber[4] konstruierten Detektoren registriert man die Verformungen eines Festkörpers, der unter dem Einfluß einer Gravitationswelle zu Quadrupolschwingungen angeregt wird. Der größte Effekt ist dabei natürlich im Resonanzfall zu erwarten. Daher ist der Detektor nur in einem engen Frequenzbereich besonders empfindlich.
Bei der zweiten Methode werden die relativen Abstandsänderungen in einem mit Lasern betriebenen Michelson-Interferometer aufgezeichnet. Die beobachteten Raumpunkte sind hier durch die Positionen des Strahlteilers und der beiden Endspiegel definiert. Diese Methode bietet den Vorteil, daß man neben einem abstimmbaren schmalbandigen Signal auch breitbandige Signale registrieren kann.
Die relative Abstandsänderung entspricht bei geeigneter Ausrichtung des Detektors der Amplitude α der am Detektor eintreffenden Gravitationswelle, sie ist maximal $\Delta l/l \simeq \alpha$. Um eine Vorstellung davon zu gewinnen, wie gering der zu erwartende Effekt ist, soll hier eine Abschätzung der Größenordnung der am Empfänger zu erwartenden Amplitude genügen. Als wesentliche Quellen der Gravitationsstrahlung kommen rasch bewegte große Massen in Sternen bzw. Sternsystemen, insbesondere unter Beteiligung von Neutronensternen oder Schwarzen Löchern, in Frage.
Ein einfaches Beispiel ist ein Doppelsternsystem, das aus zwei einander im Abstand d

[4] J. Weber: The Search for Gravitational Waves, in A. Held (Ed.), General Relativity and Gravitation, Vol. 2, Plenum Press, London 1980.

umkreisenden Massen M_1 und M_2 bestehen möge. Die dimensionslose Amplitude α ist durch die hier vorkommenden charakteristischen Längen bestimmt. Sie ist zunächst proportional zu den für die gravitative Wirkung maßgeblichen Schwarzschild-Radien r_{S1} und r_{S2} der Sterne. Zweitens ist die Ausdehnung des Systems d (Abstand der Sterne) im Nenner zu berücksichtigen, denn je geringer dieser ist, desto schneller erfolgt die Bewegung der Massen. Da die Amplitude mit zunehmender Entfernung $D(\gg d)$ von der Strahlungsquelle abnimmt, wird schließlich α mit D im Nenner dimensionslos. Beim Beobachter in der Entfernung D trifft demnach eine Gravitationswelle (der doppelten Umlauffrequenz) mit einer Amplitude in der Größenordnung ein

$$\alpha = \frac{r_{s1} r_{s2}}{dD} \quad . \tag{10.67}$$

Um ein Zahlenbeispiel zu geben, betrachten wir ein System, das aus zwei Neutronensternen (Massen je 1.4 $M_\odot$) besteht, die im Abstand von etwa 20 km einander umkreisen. Befindet sich dieses im nächstgelegenen Galaxienhaufen, dem etwa 50×10^6 Lichtjahre entfernten Virgo-Haufen, dann erwartet man nach obiger Abschätzung auf der Erde eine Amplitude in der Größenordnung $\alpha \simeq 10^{-21}$. Diese extrem kleine Amplitude entspricht einer Längenänderung von 10^{-3} fm je Kilometer. Zum Vergleich sei daran erinnert, daß die Radien kleiner Kerne einige fm (10^{-13} cm) betragen. Man hofft, diese minimale Amplitude mit den in nächster Zeit in Betrieb gehenden Laser-Interferometern auflösen zu können.
Verschmelzen schließlich die umlaufenden Sterne beim Verlassen der letzten stabilen Bahn, dann kommt es zu einer für sehr kurze Zeit besonders heftigen Emission von Gravitationsstrahlung. Im Endzustand bleibt nur ein Partner (etwa ein Schwarzes Loch) bestimmter Masse übrig. Eine entsprechende Obergrenze beobachtbarer Amplituden, die von solchen Zusammenbrüchen herrühren, kann man abschätzen, indem man die obige Formel (10.67) auf

$$\alpha < \frac{r_s}{D} \simeq 10^{-17} \left[\frac{10\mathrm{kpc}}{D}\right] \frac{M}{M_\odot} \quad . \tag{10.68}$$

reduziert. Die Entfernung D wird hierbei in Kiloparsec gemessen.
Der von J. Weber benutzte Detektor besteht aus einem 153 cm langen Aluminiumzylinder von etwa 10^6 g, der mechanisch und akustisch so gut isoliert wird, daß in seiner Grundschwingung von ca. 1.6 kHz nur noch das thermische Rauschen als dominierende Störung vorhanden ist. Zur Verminderung des Rauschens wird der Detektor bei tiefen Temperaturen betrieben. Die Schwingungen werden mit Hilfe der am Zylinder angebrachten piezoelektrischen Quarze in elektrische Signale verwandelt und dann registriert. Die so nachweisbaren Amplituden der Zylinderflächen lagen bei ca. 10^{-16} m . Zur Unterscheidung der Signale vom Rauschen und um andere nicht gravitative Effekte zu vermeiden, stellte Weber zwei Zylinder in großer Entfernung (in Maryland und in Chicago) auf und registrierte das gleichzeitige Ansprechen der Detektoren. Er konnte jedoch nicht überzeugend nachweisen, daß die von ihm beobachteten Koinzidenzen auf Gravitationswellen zurückzuführen waren. Seine Versuche wurden in mehreren anderen Laboratorien mit verbesserten Detektoren wiederholt, doch gelang es nicht, seine

Ergebnisse zu reproduzieren. Es bleibt sein Verdienst diesem neuen Forschungszweig den entscheidenden Impuls gegeben zu haben. Immerhin hatte der negative Ausgang der Experimente obere Grenzen für Raten und Stärke von Gravitationswellen im kHz-Bereich ergeben und offenbar waren Amplituden größer als 10^{-17} nicht oder äußerst selten zu erwarten.

Bei einer Erhöhung der Empfindlichkeit des Weber-Detektors zur Messung von Auslenkungen der Größenordnung 10^{-17} cm gelangt man in den Bereich der Quantentheorie. Die Empfindlichkeit ist letztlich durch das Unschärfeprinzip begrenzt.[5] Je genauer der Empfänger die Position an den Enden des Zylinders mißt, desto stärker und unvorhersehbarer ist die Rückwirkung der Messung auf den Detektor. Wesentlich ist dann die Methode der „unzerstörbaren Quantenmessung“ (quantum nondemolition measurement). Der Empfänger ist hiernach im Prinzip so zu konstruieren, daß der Rückstoß den Effekt der Gravitationswellen auf den Zylinder nicht beeinflußt.[6]

Nach diesen ersten Erfahrungen kam man vermehrt zu der Auffassung, daß die interferometrische Methode weitaus erfolgversprechender ist. Wir wollen das Wirkungsprinzip des Interferometers kurz erläutern. Die beiden Arme des Michelson-Interferometers mit den frei beweglich und von anderen Einwirkungen isoliert aufgehängten Spiegeln mögen entlang der x- und y-Achse orientiert sein. Eine in z-Richtung einfallende Gravitationswelle vom Polarisationstyp I wird entgegengesetzte Längenänderungen in den Armen (Längen L) hervorrufen

$$L_x = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\cos\omega t\right) L \tag{10.69}$$

$$L_y = \left(1 - \frac{1}{2}\alpha\cos\omega t\right) L \quad . \tag{10.70}$$

Beim Michelson-Interferometer ist die am Detektor in O (s. Fig. 17) gemessene Intensität des Lichts

$$I = \frac{1}{2} I_0 \left(1 + \cos\delta\right) \quad . \tag{10.71}$$

Hier bedeutet I_0 die einfallende Intensität und δ die Phasenverschiebung der interferierenden Teilstrahlen. Letztere hängt von der Differenz der Weglängen ΔL und der Wellenlänge λ des Lichts ab

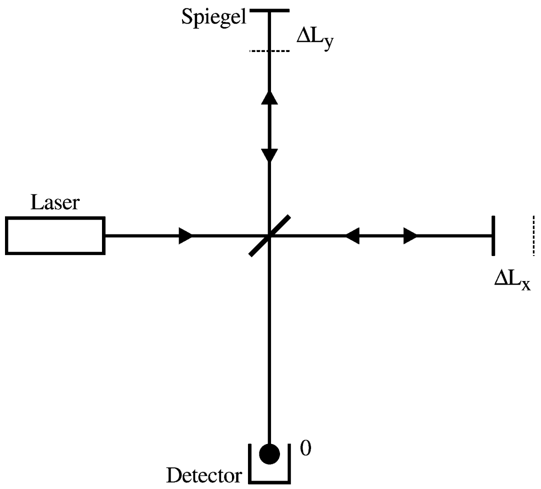
$$\delta = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \quad . \tag{10.72}$$

Die durch eine Gravitationswelle hervorgerufenen Längenänderungen führen, wenn die Laufzeit des Lichts im Interferometer $2L/c$ klein gegen die Periode der Gravitationswelle ist, auf die zeitabhängige Phasenverschiebung

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda}\left(L_x - L_y\right) = \frac{4\pi L\alpha}{\lambda}\cos\omega t \quad . \tag{10.73}$$

[5] Diese Ursache der beschränkten Meßgenauigkeit wird diskutiert von K.S. Thorne et al., Phys. Rev. Lett. **40**, 667 (1978).

[6] Hinsichtlich weiterer Einzelheiten zu diesen Untersuchungen siehe C.M. Caves et al., Rev. Mod. Phys. **52**, 341 (1980).



Figur 17: Laserinterferometer in Michelson-Anordnung. Die durch die Gravitationswellen hervorgerufenen unterschiedlichen Abstandsänderungen der Spiegel führen zu einer meßbaren Phasendifferenz des zwischen den Spiegeln laufenden Laserlichts.

Dies ist in die Gleichung für die Intensität (10.71) einzusetzen. Gelingt es also die Änderung der so entstehenden Interferenzstreifen zu messen, kann man nach diesem Prinzip eine vorhandene Gravitationswelle nachweisen. Für den Empfang einer Gravitationswelle bestimmter Frequenz gibt es eine optimale Länge der Interferometerarme. Läßt man das Licht mehrfach zwischen den Spiegeln hin und her laufen, kann die Armlänge vergrößert werden. Die Durchführung eines solchen Experiments erfordert allerdings einen erheblichen meßtechnischen Aufwand. Daher sind diese Detektoren auch in finanzieller Hinsicht aufwendiger als der Weber-Zylinder.
Gegenwärtig werden in den USA zwei Interferometer mit je 4 km Armlänge (LIGO) erstellt, eines bei Hanford, Washington, das andere in der Nähe von Livingston, Louisiana.[7] In Italien entsteht durch eine italienisch-französische Kooperation (VIRGO) in der Nähe von Pisa eine Anlage mit 3 km Armlänge. Das in deutsch-britischer Zusammenarbeit in Ruthe bei Hannover gebaute Interferometer GEO 600 hat eine Armlänge von 600 m und soll nach Plan Ende 2001 den ständigen Meßbetrieb aufnehmen. Bei diesem Detektor werden zum Ausgleich der geringen Armlänge besonders fortschrittliche Interferometer-Techniken verwendet. Er ist in der Lage, Gravitationswellen im Frequenzbereich von 50 Hz bis 2kHz nachzuweisen.[8] Zu erwähnen ist ferner der japanische Detektor mit 300 m Armlänge (TAMA 300), der als Technologiestudie für einen geplanten 3-km-Detektor dient. Mit diesen Bemühungen rückt der direkte Nachweis von Gravitationswellen in greifbare Nähe.[9] Für die weiter Zukunft planen ESA und

[7] Das Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) wird näher beschrieben von A. Abromovici et al., Science **256**, 325 (1992).

[8] Nähere Einzelheiten über GEO 600 findet man z. B. bei K. Danzmann in C. Lämmerzahl et al. (Eds.): Gyros, Clocks, and Interferometers: Testing Relativistic Gravity in Space, Springer-Verlag, Berlin 2000.

[9] Ausführliche Darstellungen zum Thema der Gravitationswellendetektoren findet man z. B. in D. Blair

NASA den Start eines satellitengestützten Interferometers LISA (Laser Interferometer Space Antenna) mit über 5×10^6 km Armlänge, der zur Messung niederfrequenter Gravitationswellen (bis 1 kHz) dienen soll.
Zukünftig sollen diese und weitere noch zu bauende Interferometer ein weltweites Netzwerk ergeben und so die weitestgehende Entschlüsselung der in den Gravitationswellen enthaltenen Informationen ermöglichen. Damit öffnet sich ein neues Fenster zur Beobachtung von Ereignissen in kosmischen Systemen, die auf schnellen Bewegungen großer Massen beruhen. Diese Gebiete sehr starker Gravitationsquellen sind gewöhnlich von einer relativ dichten Materieschicht (Dunkelwolken) umgeben, die elektromagnetische Wellen absorbiert. Von den Ereignissen dahinter können wir nur über die das ganze Universum durchdringenden Gravitationswellen erfahren. Man darf von der Gravitationswellen-Astronomie erwarten, daß sie wesentlich zur Beantwortung vieler noch ungeklärter astrophysikalischer Fragen beitragen und so unsere Erkenntnisse über das Weltall erweitern wird.

(Ed.): The Detection of Gravitational Waves, Cambridge University Press, Cambridge 1991; P.R. Saulson, Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detection, World Scientific, Singapore 1994.