

Taschenbuch der Physik

Formeln, Tabellen, Übersichten

von
Horst Stöcker

überarbeitet

Taschenbuch der Physik – Stöcker

schnell und portofrei erhältlich bei beck-shop.de DIE FACHBUCHHANDLUNG

Harri Deutsch 2004

Verlag C.H. Beck im Internet:

www.beck.de

ISBN 978 3 8171 1720 8

6 Mechanik der deformierbaren Körper

6.1 Elastizitätslehre

Die Elastizitätslehre beschäftigt sich mit den Auswirkungen von äußeren, i. Allg. statischen Kräften auf die Form fester Körper.

Elastische Verformung, ein reversibler (umkehrbarer) Verformungsprozess, bei dem der Körper nach Abklingen der äußeren Kraft wieder in seine ursprüngliche Form zurückkehrt.

Plastische Verformung, ein irreversibler (nichtumkehrbarer) Verformungsprozess, bei dem nach Abklingen der äußeren Kraft eine Verformung des Körpers bestehen bleibt.

6.1.1 Spannung

1. Definition und Eigenschaften der Spannung

Spannungen, innere Kräfte in einem Körper. Man beschreibt die in einem Körper wirkenden Spannungen durch Zerlegen des Körpers in kleine Volumenelemente, auf die diese Kräfte wirken. Die Volumenelemente erleiden unter den Spannungen **Formänderungen**.

Spannung, S , der Quotient aus wirkender Kraft und Flächenelement, an dem die Kraft angreift.

Normalspannung, σ , wirkt senkrecht zum Flächenelement.

Schubspannung, τ , wirkt parallel zur Fläche.

Spannung	$ML^{-1}T^{-2}$		
	Symbol	Einheit	Benennung
$\vec{S} = \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$	\vec{S}	N/m^2	Spannungsvektor
$\vec{\sigma} = \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A}$	$\vec{\sigma}$	N/m^2	Normalspannungsvektor
$\vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{F}_t}{\Delta A}$	$\vec{\tau}$	N/m^2	Schubspannungsvektor
	ΔA	m^2	Flächenelement
	$\Delta \vec{F}$	N	wirkende Kraft
	$\Delta \vec{F}_n$	N	Normalkomponente von \vec{F}
	$\Delta \vec{F}_t$	N	Tangentialkomponente von \vec{F}

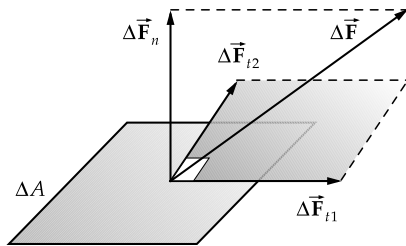


Abbildung 6.1: Zerlegung der an einer Fläche ΔA angreifenden Kraft $\Delta \vec{F}$ in eine Normalkomponente $\Delta \vec{F}_n$ und zwei zueinander senkrechte Tangentialkomponenten $\Delta \vec{F}_{t1}$, $\Delta \vec{F}_{t2}$

Newton pro Quadratmeter, N/m^2 , SI-Einheit der Spannung:

$1 N/m^2$ ist die wirkende Spannung, wenn an der Fläche von $1 m^2$ eine Kraft von $1 N$ angreift.

- Die typische Größenordnung für die Spannung ist $MN/m^2 = N/mm^2$.
- Bei Druckbelastung hat die Spannung ein negatives Vorzeichen.
- Es wird angenommen, dass sich der Querschnitt bei der Verformung nicht ändert.

- An einem Draht des Durchmessers $d = 1 \text{ mm}$ hängt ein Gewicht von $m = 1 \text{ kg}$. Die Spannung des Drahtes ist

$$S = \frac{F}{A} = \frac{mg}{\pi(d/2)^2} = \frac{1 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}{\pi \cdot (0.5 \text{ mm})^2} = 12.5 \text{ N/mm}^2 = 12.5 \text{ MN/m}^2.$$

2. Spannungstensor,

$\hat{\tau}$, beschreibt den **Spannungszustand** eines kleinen, würfelförmigen Körperelements. Der Spannungszustand kann allgemein durch die Angabe von **neun** Größen beschrieben werden, wobei für jede Seite des Würfels drei Kraftkomponenten anzugeben sind (**Abb. 6.2**). Ist der Würfel hinreichend klein, so wirkt auf den gegenüberliegenden Seiten die gleiche Kraft, so dass der Spannungszustand durch die Elemente τ_{ij} des **Spannungstensors** beschrieben wird:

$$\hat{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} = \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} = \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} = \sigma_z \end{pmatrix}.$$

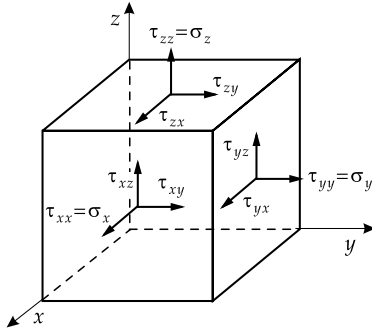


Abbildung 6.2: Komponenten des Spannungstensors

- Bei den Komponenten des Spannungstensors charakterisiert der erste Index die Fläche und der zweite die Krafrichtung. So gibt das Element τ_{xy} die an einem Flächenelement wirkende Schubspannung mit der Flächennormalen in x -Richtung und der Kraft in y -Richtung an.

In der Diagonale stehen die **Normalspannungen** (Komponenten der Spannung in Richtung der Flächennormalen), außerhalb der Diagonale die **Schubspannungen** oder **Tangentialspannungen** (Komponenten der Spannung senkrecht zur Flächennormalen). Der Spannungstensor ist symmetrisch:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}.$$

$\hat{\tau}$ enthält daher nur sechs unabhängige Größen: drei Normalspannungen und drei Schubspannungen.

6.1.1.1 Zug, Biegung, Scherung, Torsion

Folgende Begriffe beschreiben elementare Belastungsfälle:

Zug bzw. **Druck**, tritt auf, wenn die Schubspannungen verschwinden und die Kraft gleichmäßig am Körper angreift. Der Körper reagiert mit **Dehnung** und **Querdehnung** (**Abb. 6.3** und **Abb. 6.4**).

Isotroper Druck (hydrostatischer Druck), der gleiche Druck wirkt auf alle Seiten des Körpers (**Abb. 6.5**).

Biegung, die Schubspannungen verschwinden, der Druck oder Zug greift aber ungleichmäßig an und bewirkt eine ungleichförmige Verformung des Körpers; an einigen Stellen des Körpers herrscht eine Zugbelastung, an anderen eine Druckbelastung (**Abb. 6.7**).

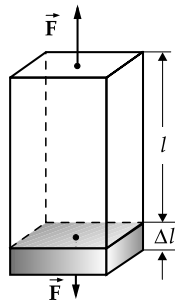


Abbildung 6.3: Dehnung

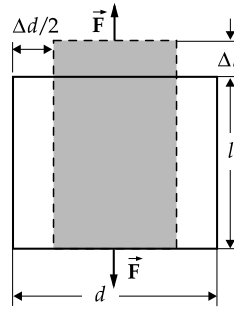


Abbildung 6.4: Querdehnung

Scherung, tritt auf, wenn nur Schubspannungen wirken, die Kräfte also parallel zur Oberfläche des Körpers angreifen. Der Körper reagiert mit einer Verformung, die als Scherung bezeichnet wird. Die Winkel zwischen den Kanten des Körpers verändern sich (**Abb. 6.6**).

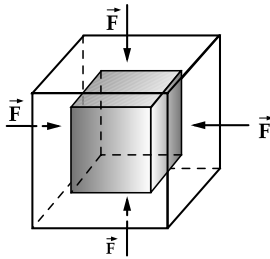


Abbildung 6.5: Allseitige Kompression

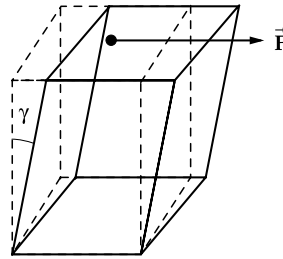
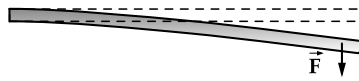
Abbildung 6.6: Scherung. Scherwinkel γ 

Abbildung 6.7: Biegung

Torsion, wie bei der Scherung treten nur Schubspannungen auf, die aber an verschiedenen Stellen in verschiedene Richtungen zeigen und dadurch ein **Drehmoment** erzeugen. Dies führt zu einer Verdrehung der Körperachsen.

Praktische Belastungsfälle lassen sich aus diesen elementaren Fällen zusammensetzen.

6.1.2 Elastische Verformung

Elastische Verformung wird beschrieben als die Veränderung in der Geometrie eines Körpers unter dem Einfluss äußerer Kräfte.

Methode der finiten Elemente: Um die Verformung eines Körpers zu beschreiben, betrachtet man ein kleines würfelförmiges Element dieses Körpers und seine aus der wirkenden Spannung folgende Verformung. Die Verformung eines ausgedehnten Körpers kann dann durch Summierung der Verformung der Elemente berechnet werden.

Man unterscheidet grundsätzlich zwei Arten der Verformung eines Würfels:

Dehnung, ϵ , eine oder mehrere Seitenlängen des Würfels verändern sich, die rechten Winkel bleiben jedoch erhalten,

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

wobei l und Δl die ursprüngliche Länge bzw. die eintretende Längenänderung ist.

► Stauchungen sind negative Dehnungen.

Scherung, γ , eine Veränderung eines oder mehrerer Winkel im Würfel, ohne dass sich die Seitenlängen ändern. Die Scherung γ bezeichnet die Abweichung des betreffenden Winkels vom rechten Winkel (in rad). In der Praxis treten die folgenden vier Fälle auf:

- **Dehnung**,
- **Querdehnung**,
- **allseitige Kompression**,
- **Scherung**.

6.1.2.1 Dehnung

1. Eigenschaften der Dehnung

Dehnung, aufgrund der äußeren Zugkraft verlängert sich der Körper in Richtung der wirkenden Normalkraft oder verkürzt sich aufgrund einer äußeren Druckkraft. Die Längenänderung folgt im elastischen Bereich bis zur Proportionalitätsgrenze dem **Hookeschen Gesetz**, ist also proportional zur anliegenden Spannung (Abb. 6.8, 6.13):

Spannung = Elastizitätsmodul · Dehnung (Hookesches Gesetz)			$ML^{-1}T^{-2}$
	Symbol	Einheit	Benennung
$\epsilon = \frac{1}{E}\sigma$	ϵ	1	Dehnung
$\sigma = E\epsilon$	E	N/m^2	Elastizitätsmodul
	σ	N/m^2	Normalspannung

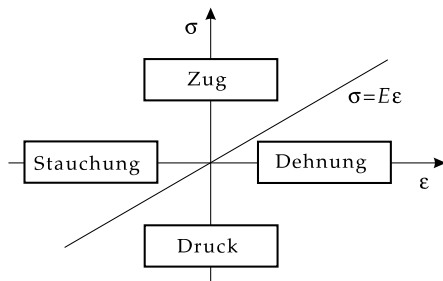


Abbildung 6.8: Hookesches Gesetz. Die Dehnung ϵ ist der Spannung σ proportional

2. Elastizitätsmodul und Dehnungszahl

Elastizitätsmodul, Youngscher Modul, E , gibt die notwendige Normalspannung σ pro Dehnung (relativer Längenänderung $\epsilon = \Delta l/l$) an. E ist eine Werkstoffkonstante. SI-Einheit von E :

$$[E] = \frac{N}{m^2}.$$

Der Elastizitätsmodul wird üblicherweise in $N/mm^2 = MN/m^2$ oder GN/m^2 angegeben.

Dehnungszahl α , der Kehrwert des Elastizitätsmoduls, gibt die erfolgende Dehnung pro angewandter Spannung an,

$$\alpha = \frac{1}{E}.$$

SI-Einheit der Dehnungszahl α :

$$[\alpha] = \frac{\text{m}^2}{\text{N}}.$$

► Das Hookesche Gesetz gilt nur näherungsweise bei kleinen Dehnungen. Bei größeren Dehnungen hängen Normalspannung und Dehnung **nichtlinear** zusammen. Der Elastizitätsmodul ist eine Werkstoffkonstante, die auch von der Temperatur abhängt. Typische Werte liegen zwischen 10^4 und 10^5 N/mm² (siehe Tab. 8.2).

■ Gold hat einen Elastizitätsmodul von 81000 N/mm². Um einen Würfel aus Gold der Kantenlänge $l = 10$ cm um 1‰ seiner Seitenlänge zu stauchen ($\epsilon = -0.001$), muss eine Spannung von

$$\sigma = E\epsilon = -81 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2 \cdot 0.001 = -81 \text{ N/mm}^2$$

angewandt werden, d. h., auf seiner nach oben gewandten Fläche muss die Masse

$$m = \frac{F}{g} = \frac{A \cdot \sigma}{g} = \frac{l^2 \sigma}{g} = 82.6 \cdot 10^3 \text{ kg} = 82.6 \text{ t}$$

lasten.

Im allgemeinen ist die Dehnung ϵ eines würfelförmigen Körperelements eine Funktion $\epsilon(\sigma)$ der anliegenden Normalspannung σ .

Elastizitätsmodul bei einer gegebenen Normalspannung, die Änderung $d\sigma$ der Normalspannung, die für eine Änderung der Dehnung um $d\epsilon$ erforderlich ist:

$$E(\sigma) = \frac{d\sigma}{d\epsilon}.$$

Der Elastizitätsmodul ist also die Ableitung der Funktion $\sigma(\epsilon)$, oder graphisch die Steigung der Kurve im Spannungs-Dehnungs-Diagramm.

6.1.2.2 Querdehnung

1. Definition der Querdehnung

Querdehnung, die Veränderung der Seitenlänge eines Würfels senkrecht zur wirkenden Kraft.

▲ Aufgrund einer Zugkraft wird der Körper länger, aber auch schmaler.

Relative Dickenänderung (Querdehnung), ϵ_q , proportional zur Dehnung und zur Normalspannung:

Querdehnung, Querkontraktion			1
$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d}$ $= -\nu \cdot \epsilon = -\frac{\mu}{1} \epsilon$ $= -\frac{\nu}{E} \sigma = -\frac{1}{\mu E} \sigma$	Symbol	Einheit	Benennung
	d	m	Dicke
	Δd	m	Dickenänderung
	ϵ_q	1	Querdehnung
	ϵ	1	Dehnung
	ν	1	Querdehnungszahl
	μ	1	Poissonzahl
	E	N/m ²	Elastizitätsmodul
σ	N/m ²	Normalspannung	

Querdehnungszahl, ν , die Proportionalitätskonstante zwischen Dehnung und Querdehnung.

2. Poissonzahl,

Poissonscher Koeffizient, μ , Kehrwert der Querdehnungszahl ν , gibt das Verhältnis von relativer Dickenänderung $\Delta d/d$ zu relativer Längenänderung $\Delta l/l$ an:

$$\mu = \frac{1}{\nu} = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}.$$

- ▶ Das negative Vorzeichen zwischen ϵ_q und ϵ drückt aus, dass z. B. der Durchmesser eines zylindrischen Drahtes bei Zug kleiner wird, während sich die Länge vergrößert.
- ▶ Typische Werte der Querdehnungszahl: $\nu \approx 0.3$ bis 0.4 , $\mu \approx 2$ bis 3 .
- Bei dem oben aufgeführten Beispiel eines Würfels aus Gold mit der Kantenlänge $l = 10$ cm, auf dem eine Masse von 82.6 t eine Stauchung von 1% ($\epsilon = -0.001$) erzielt, wird der Würfel breiter um $\epsilon_q = -\nu\epsilon = 0.42 \cdot 0.001 = 0.42\%$.

3. Volumenänderung

Aufgrund von Dehnung und Querdehnung ändert sich das Volumen eines Stabes mit quadratischem Querschnitt:

$$\Delta V = V' - V = (d + \Delta d)^2(l + \Delta l) - d^2l$$

(V, V' Volumen ohne und unter Spannung, ΔV Volumenänderung, l, d Abmessungen des Stabes ohne Spannung, Δl Änderung der Abmessung in Spannungsrichtung, Δd Änderung der Abmessung senkrecht zur Spannungsrichtung). Für kleine Veränderungen dürfen Terme, die quadratisch in Δd und Δl sind, vernachlässigt werden:

$$\Delta V = d^2\Delta l + 2d \cdot l\Delta d.$$

Die relative Volumenänderung ist

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} = \epsilon(1 - 2\nu).$$

- ▶ Für $\nu = 0.5$ bleibt das Volumen gerade unverändert, für $\nu < 0.5$ erhöht es sich. Werte von $\nu > 0.5$ würden eine Verringerung des Volumens bei einer anliegenden Zugspannung bedeuten, was physikalisch nicht auftritt.
- Der Goldwürfel von 10 cm Kantenlänge ändert sein Volumen um $\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\nu) = -0.001(1 - 2 \cdot 0.42) = -0.16\%$,
in absoluten Zahlen:
 $\Delta V = -0.00016 \cdot V = -0.00016 \cdot 1000 \text{ cm}^3 = 0.16 \text{ cm}^3$.

4. Dehnungstensor,

$\hat{\epsilon}$, bestimmt den allgemeinen Dehnungszustand des Körpers, wenn ein Massenpunkt bei $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ durch die Dehnung um den Verschiebungsvektor $\vec{s}(\vec{r})$ nach $\vec{r} + \vec{s}(\vec{r})$ verschoben wird:

$$dx_i \rightarrow dx_i + ds_i = dx_i + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial s_i}{\partial x_k} dx_k.$$

Die Komponenten des Dehnungstensors $\hat{\epsilon}$ werden durch die partiellen Ableitungen der Komponenten des Verschiebungsvektors \vec{s} nach den Koordinaten $x_i, i = 1, 2, 3$ ausgedrückt:

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \epsilon_1 & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \epsilon_2 & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_i = 2 \frac{\partial s_i}{\partial x_i}, \quad \gamma_{ik} = \gamma_{ki} = \frac{\partial s_k}{\partial x_i} + \frac{\partial s_i}{\partial x_k}.$$

Der Dehnungstensor ist ein symmetrischer Tensor.

6.1.2.3 Allseitige Kompression

1. Eigenschaften der allseitigen Kompression

Allseitige Kompression, die Veränderung des Volumens eines Körpers, wenn von allen Seiten die gleiche Druckkraft wirkt, im Gegensatz zu Dehnung und Querdehnung, bei denen die Kraft nur in eine Richtung wirkt.

Die relative Volumenänderung ist

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\epsilon(1 - 2\nu),$$

wobei der Faktor 3 berücksichtigt, dass nicht nur eine, sondern drei Normalspannungen wirken. Setzt man für letztere

$$\sigma = -\Delta p,$$

wobei Δp die Druckbelastung ist, und verwendet $\epsilon = \sigma/E$, so gilt

$$-\Delta p = \frac{\Delta V}{V} \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Analog zum Elastizitätsmodul definiert man die Proportionalität

Druck = Kompressionsmodul · relative Volumenänderung			$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$
$-\Delta p = K \frac{\Delta V}{V}$	Symbol	Einheit	Benennung
	Δp	Pa = N/m ²	Druck
	K	N/m ²	Kompressionsmodul
	ΔV	m ³	Volumenänderung
	V	m ³	Volumen des Körpers

2. Kompressionsmodul,

K , gibt den Druck an, der pro relativer Volumenänderung erforderlich ist.

Übliche Einheit für K : N/mm² = MN/m² oder GN/m².

- Typische Werte für den Kompressionsmodul liegen zwischen 100 und 200 GN/m²,
(Eis: $K \approx 10$ GN/m², Blei: $K \approx 44$ GN/m², s. **Tab. 8.3/4**).
- Kupfer hat einen Kompressionsmodul von 126 000 N/mm². Unter Atmosphärendruck von ca. 10⁵ Pa verändert sich das Volumen eines Kupferblocks also um

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{\Delta p}{K} = 7,9 \cdot 10^{-7} = 0,000079 \%$$

Das Volumen eines Kupferblockes von 1 m³ verändert sich also um ca. 0,8 cm³.

Kompressionsmodul K und Elastizitätsmodul E sind durch die Querdehnungszahl verbunden:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

In der Thermodynamik ist es bei der Betrachtung von Flüssigkeiten und Gasen üblich, anstelle des Kompressionsmoduls K den Kehrwert, die Kompressibilität κ , zu betrachten:

3. Kompressibilität,

κ , der Kehrwert des Kompressionsmoduls (s. **Tab. 8.3/4**):

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{\Delta V/V}{-\Delta p}.$$

Bei Gasen gilt:

$$\kappa = \frac{A}{V(p + p_T)}.$$

A ist eine für das Gas charakteristische, mit der Temperatur anwachsende Funktion. V Volumen, p äußerer Druck, p_T van-der-Waals-Druck. Für das ideale Gas ist $A = 1$ und $p_T = 0$.

6.1.2.4 Biegung eines Stabes (Balkens)

1. Begriffsbestimmung für die Biegung

Biegung, tritt auf, wenn ein punktwise eingespanntes oder gestütztes Bauteil außerhalb der Stützstellen belastet wird. Nachfolgend wird nur der Fall eines Balkens betrachtet, der längs der z -Achse orientiert sei und konstanten Querschnitt (x,y) habe. Die belastende Kraft wirkt senkrecht zur z -Achse.

Belastungsfälle bei Biegung:

- einseitig fest eingespannter Stab (Tangente horizontal), Belastung punktwise (freies Ende) oder Belastung kontinuierlich längs z -Achse verteilt,
- beiderseitig feste Einspannung, Belastung punktwise oder kontinuierlich,
- einseitig, feste Einspannung, andere Seite auf Stütze aufliegend,
- beiderseits auf Stützpunkt aufliegend.

In einem Teil des Balkenquerschnitts wirkt Druckbelastung, im anderen Teil Zugbelastung. Dazwischen liegt die **neutrale Faser**, die durch den Schwerpunkt des Balkenquerschnitts führt (s. **Abb. 6.9**).

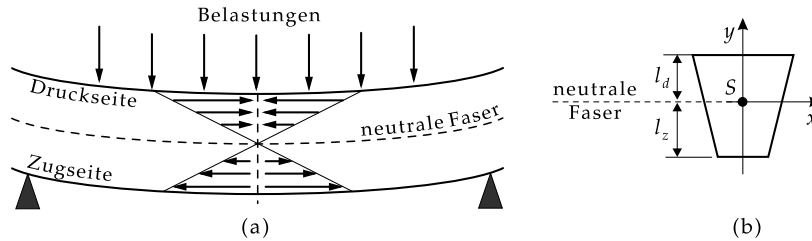


Abbildung 6.9: Schematische Darstellung von Durchbiegung, Druck- und Zugverteilung in einem beiderseits aufliegenden Balken. Die neutrale Faser verläuft durch den Schwerpunkt S . l_d, l_z : Abstände der äußersten Faser auf Druck- bzw. Zugseite von neutraler Faser. (a): Längsschnitt, (b): Querschnitt

2. Biegemoment,

M_b , Produkt aus Kraft F und Kraftarm l . Beim einseitig eingespannten Stab der Länge l , der am freien Ende belastet wird, ist der Kraftarm vom freien Ende zur Einspannung hin zu zählen. Das Biegemoment auf einen zur Balkenachse z senkrechten Querschnitt ist am freien Ende Null; es ist maximal an der Einspannungsstelle, $M_{b,max} = F \cdot l$.

Beim einseitig eingespannten Balken mit mehreren Punktlasten (oder Linienlast) ist das Biegemoment auf einem ausgewählten Balkenquerschnitt die Summe (das Integral) über die Biegemomente der Einzelkräfte. Beim beiderseits frei aufliegenden oder eingespannten Balken mit einer Einzellast liegt das maximale Biegemoment an der Belastungsstelle.

Beim beiderseits aufliegenden oder eingespannten Balken mit konstanter Linienlast (oder einer Summe äquidistanter, gleichgroßer Punktlasten) liegt das maximale Biegemoment in der Balkenmitte.

Biegemoment	ML^2T^{-2}		
	Symbol	Einheit	Benennung
$M_b = \sum_i F_i \cdot l_i$	M_b	Nm	Biegemoment
	F_i	N	i -te wirkende Kraft
	l_i	m	i -ter Kraftarm

Wirken mehrere Kräfte, so sind die Biegemomente zu addieren. Rechtsdrehende Momente und linksdrehende Momente gehen mit unterschiedlichen Vorzeichen ein.

Flächenträgheitsmoment, J , auch Flächenmoment; charakterisiert Form und Größe der Querschnittsfläche des Balkens (s. **Abb. 6.9 (b)**).

Axiales Flächenträgheitsmoment J_a , bezogen auf die neutrale Faser:

$$J_x = \int y^2 dA, \quad J_y = \int x^2 dA, \quad dA \text{ Flächenelement.}$$

Polares Flächenträgheitsmoment J_p , bezogen auf den Schwerpunkt:

$$J_p = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = J_x + J_y.$$

Widerstandsmoment, W_b :

$$W_{x,\text{zug}} = \frac{J_x}{e_{\text{zug}}}, \quad W_{x,\text{druck}} = \frac{J_x}{e_{\text{druck}}},$$

mit $e_{\text{zug}}, e_{\text{druck}}$ als Abstände der äußersten Faser auf der Zug- bzw. Druckseite des Balkenquerschnitts von der neutralen Faser (s. **Abb. 6.9**).

Die **maximale Biegespannung** (Randspannung) ist gegeben durch

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}.$$

3. Durchbiegung,

wird bestimmt von der Geometrie der Lagerung und vom Verhältnis

$$\frac{F}{EJ_a}$$

der wirkenden Kraft F zum Produkt aus Elastizitätsmodul E und axialem **Flächenträgheitsmoment** J_a des Balkenquerschnitts. Das axiale Flächenmoment für kreisförmigen Querschnitt mit Durchmesser d und für einen rechteckigen Querschnitt (Breite b und Höhe h) ist:

$$J_{a,\text{Kreis}} = \frac{\pi}{64} d^4 \approx 0.049 d^4, \quad J_{a,\text{Rechteck}} = \frac{bh^3}{12} \approx 0.083 bh^3.$$

Die größtmögliche Belastung eines Balkens mit Rechteckquerschnitt ist proportional zur Breite und zur dritten Potenz der Höhe, aber umgekehrt proportional zur Länge des Balkens.

4. Beispiele: Biegemomente und Durchbiegungen für typische Belastungsfälle

- Einseitig eingespannter Stab, Punktlast F am Ende (**Abb. 6.10 (a)**):

$$F_A = F, \quad s = \frac{l^3}{3} \frac{F}{EJ_a}, \quad M_{b,\text{max}} = lF.$$

- Einseitig eingespannter Stab, Linienlast, Summe F (**Abb. 6.10 (b)**):

$$F_A = F, \quad s = \frac{l^3}{8} \frac{F}{EJ_a}, \quad M_{b,\text{max}} = \frac{l}{2} F.$$

- Beiderseits aufliegender Stab, Punktlast F , unsymmetrisch (**Abb. 6.10 (c)**):

$$F_A = \frac{b}{l} F, \quad a + b = l, \quad F_B = \frac{a}{l} F$$

$$s = \frac{a^2 b^2}{3l} \frac{F}{EJ_a}, \quad M_{b,\text{max}} = \frac{ab}{l} F.$$

- Beiderseits aufliegender Stab, Linienlast, Summe F (**Abb. 6.10 (d)**):

$$F_A = F_B = F/2, \quad s \approx \frac{l^3}{77} \frac{F}{EJ_a}, \quad M_{b,\text{max}} = \frac{l}{8} F.$$

5. Beispiel: Stahlträger

Ein Stahlträger (Elastizitätsmodul 200 GN/m^2) mit einer quadratischen Querschnittsfläche der Seitenlänge 10 cm und einer Länge von 2 m wird mit einer Masse von 1000 kg belastet. Sein Flächenträgheitsmoment J_a ist

$$J_a = J_{a,\text{Rechteck}} = 0.083 \cdot (0.1 \text{ m}) \cdot (0.1 \text{ m})^3 = 8.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4.$$

Daraus folgt

$$\frac{F}{EJ_a} = 5.9 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-2}.$$

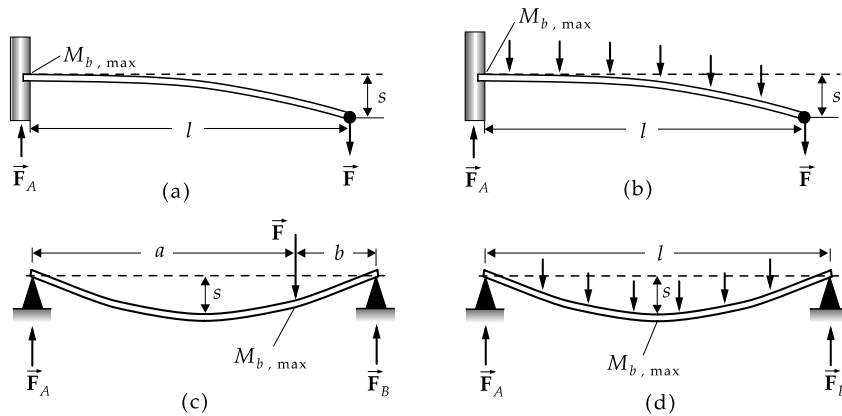


Abbildung 6.10: Biegelinien (statisch bestimmt) eines Balkens. Links: Punktlast, rechts: Linienlast. Oben: einseitige Einspannung, unten: beidseitig aufliegend

Für verschiedene Belastungsfälle ergeben sich folgende Durchbiegungen und Normalspannungen:

einseitig, gleichmäßig	$s = \frac{l^3}{8} \frac{F}{EJ_a} = 5.9 \text{ mm}$	$M_b = \frac{l}{2} F = 9810 \text{ Nm}$
zweiseitig gleichmäßig	$s = \frac{l^3}{77} \frac{F}{EJ_a} = 0.6 \text{ mm}$	$M_b = \frac{l}{8} F = 2450 \text{ Nm}$
einseitig Last am Ende	$s = \frac{l^3}{3} \frac{F}{EJ_a} = 16 \text{ mm}$	$M_b = lF = 19620 \text{ Nm}$
zweiseitig Last in der Mitte	$s = \frac{(l/2)^2(l/2)^2}{3l} \frac{F}{EJ_a}$ $= 1 \text{ mm}$	$M_b = \frac{(l/2)(l/2)}{l} F = 4900 \text{ Nm}$

Weiter gilt:

- Verdoppelt man die Länge des Trägers, so verachtfacht sich die Durchbiegung, die maximale Normalspannung verdoppelt sich.
- Halbiert man die Seitenlängen der Querschnittsfläche, so sinkt das Flächenträgheitsmoment auf ein Sechzehntel, so dass die Durchbiegung auf das Sechzehnfache steigt.

6. Biegespannung,

σ_b , die bei der Biegung im Balken erzeugte Spannung, Quotient von Biegemoment M_b und **Widerstandsmoment** W_b :

$$\sigma_b = \frac{M_b}{W_b}, \quad W_{b, \text{Kreis}} = \frac{\pi d^3}{32} = 0.098 d^3, \quad W_{b, \text{Rechteck}} = \frac{bh^2}{6} = 0.167 bh^2.$$

- Für das letzte Beispiel gilt

$$W_b = 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3.$$

Damit ergeben sich die folgenden maximal auftretenden Spannungen:

einseitig, gleichmäßig	$\sigma_b = 59 \text{ N/mm}^2$,
zweiseitig, gleichmäßig	$\sigma_b = 15 \text{ N/mm}^2$,
einseitig, Last am Ende	$\sigma_b = 118 \text{ N/mm}^2$,
zweiseitig, Last in der Mitte	$\sigma_b = 3 \text{ N/mm}^2$.

Die Zugfestigkeit von Stählen liegt dagegen zwischen 400 und 1200 N/mm². Halbiert man die Seitenlänge des Querschnitts, so sinkt das Widerstandsmoment auf ein Achtel, die Spannung steigt auf das Achtfache.

6.1.2.5 Scherung

1. Eigenschaften der Scherung

Scherung. Verformung eines Körpers, bei der sich die rechten Winkel in einem kleinen würfelförmigen Element um den **Scherwinkel** γ ändern. Scherung tritt auf, wenn Kräfte parallel zu einer Oberfläche des Würfels auftreten.

- ▲ Für kleine Scherwinkel ist der Scherwinkel proportional zur **Schubspannung** τ .

Schubspannung = Schubmodul · Scherwinkel			ML⁻¹T⁻²
$\tau = G\gamma$	Symbol	Einheit	Benennung
	τ	N/m ²	Schubspannung
	G	N/m ²	Schubmodul
	γ	rad	Scherwinkel

2. Schubmodul,

G , Proportionalitätskonstante, die die erforderliche Schubspannung pro Scherwinkeleinheit angibt.

SI-Einheit von G :

$$[G] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa}.$$

Allgemein ist die benötigte Schubspannung τ eine Funktion des gewünschten Scherwinkels γ , und man definiert den Schermodul allgemein durch

$$G = \frac{d\tau}{d\gamma}.$$

- ▲ Schubmodul G und Elastizitätsmodul E sind durch die Querdehnungszahl ν verbunden:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Aus $0 \leq \nu \leq 0.5$ folgt:

$$\frac{E}{3} \leq G \leq \frac{E}{2}.$$

- In anisotropen Werkstoffen, die sich nicht in allen Richtungen gleich verhalten, können für jede Raumrichtung andere Werkstoffkonstanten gelten.

6.1.2.6 Torsion

1. Torsion und Torsionsspannung

Torsion. Schubspannungen wirken in verschiedene Richtung, so dass ein Drehmoment auf den Körper einwirkt.

Torsionsspannung. τ , das Verhältnis von wirkendem Drehmoment M_t zum **Widerstandsmoment** W_t bei Torsion des Körpers:

$$\tau = \frac{M_t}{W_t}, \quad [\tau] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}.$$

- ▲ Das Widerstandsmoment W_t hängt von der Geometrie des Körpers ab.
- Für einen kreisförmigen Querschnitt mit Durchmesser d gilt:

$$W_t = \frac{\pi}{16} d^3 = 0.196 d^3, \quad [W_t] = \text{m}^3.$$

Bei der Torsion von Stäben wird jeder Querschnitt in Abhängigkeit von der Position längs des Stabes um einen Torsionswinkel ϕ verdreht.

2. Drillung,

ψ , bei einem kreiszylindrischen Körper der Torsionswinkel ϕ je Längeneinheit, $\psi = \phi/l$, oder $\psi = d\phi/dl$. Die Drillung ist proportional zum Drehmoment M_t , aber umgekehrt proportional zum Schubmodul G (Abb. 6.11):

Drillung	L^{-1}		
	Symbol	Einheit	Benennung
$\psi = \frac{d\phi}{dl} = \frac{W_t}{GJ_p} \tau = \frac{M_t}{GJ_p}$	ψ	rad/m	Drillung
	ϕ	rad	Torsionswinkel
	l	m	Länge des Körpers
	W_t	m^3	Widerstandsmoment
	J_p	m^4	polares Flächenmoment
	G	N/m^2	Schubmodul
	τ	N/m^2	Torsionsspannung
	M_t	Nm	Drehmoment

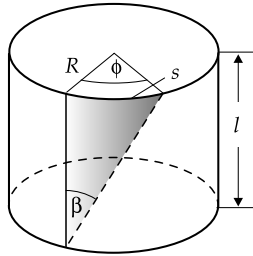


Abbildung 6.11: Torsion eines zylindrischen Stabes, Radius R , Länge l , Torsionswinkel ϕ . Verschiebung s am Rand der Stirnfläche:
 $s = R \cdot \phi = l \cdot \beta$

3. Polares Flächenmoment,

J_p , das Flächenmoment des Querschnitts, bezogen auf seinen Schwerpunkt:

$$J_p = \int r^2 dA, \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad dA = dx dy.$$

- Für einen kreisförmigen Querschnitt mit Durchmesser d gilt:

$$J_p = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 = 0.098 d^4, \quad [J_p] = \text{m}^4.$$

Für einen Kreisring mit dem äußeren Radius R_1 und dem inneren Radius R_2 gilt:

$$J_p = \frac{\pi}{2} (R_1^4 - R_2^4).$$

- Besitzt der Körper keinen kreisförmigen Querschnitt, dann ist in der Formel für den Verdrehwinkel das polare Flächenmoment J_p durch das Torsionsmoment J_t ($J_t \leq J_p$) zu ersetzen.

6.1.2.7 Energie und Arbeit bei Verformungen

1. Verformungsarbeit

Bei einer elastischen Verformung eines Körpers wird Arbeit verrichtet. Betrachtet man nur die Dehnung ϵ , so findet man mit der Definition der Arbeit:

$$\Delta W = F \Delta l = \sigma A \cdot l \Delta \epsilon = V \sigma \Delta \epsilon.$$

In Integralschreibweise ergibt sich:

Verformungsarbeit			ML^2T^{-2}
$W = V \int \sigma(\epsilon) d\epsilon$	Symbol	Einheit	Benennung
	W	J	verrichtete Arbeit
	V	m^3	Volumen des Körpers
	$\Delta \epsilon$	1	Dehnungsänderung
	σ	N/m^2	Normalspannung
	A	m^2	Fläche
	l	m	Länge des Körpers
Δl	m	Längenänderung	

$\sigma(\epsilon)$ ist die beim Verformungsprozess anliegende Normalspannung in Abhängigkeit von der erzielten Kompression. Das Integral geht von der ursprünglichen Dehnung bis zum Endwert der Dehnung.

Bei Druckbelastung $\sigma > 0$ erfolgt eine Stauchung ($\Delta \epsilon < 0$). Für die verrichtete Arbeit gilt:

$$\Delta W = -V \sigma \Delta \epsilon > 0.$$

Bei Kompression und bei Dehnung eines Körpers muss Arbeit aufgebracht werden.

2. Energieerhaltungssatz bei elastischen Verformungen

Ist eine Verformung völlig elastisch, so wird die zur Verformung aufgewandte Arbeit bei der Entspannung des Körpers als Federarbeit wieder abgegeben.

► Es gibt keine völlig elastischen Verformungen. Ein Teil der aufgewandten Arbeit geht aus thermodynamischen Ursachen immer als **Verlustwärme** verloren.

■ Um den oben behandelten Goldwürfel von 10 cm Seitenlänge um 1 ‰ zu stauchen, muss die Arbeit

$$\Delta W = V \sigma \Delta \epsilon = 1000 \text{ cm}^3 \cdot (-810 \text{ N}/\text{mm}^2) \cdot (-0.001) = 810 \text{ J}$$

verrichtet werden.

6.1.3 Plastische Verformung

1. Eigenschaften der plastischen Verformung

Plastische Verformung, die Verformung bleibt teilweise oder völlig bestehen. Daher kann die zur Verformung aufgewandte Arbeit nicht vollständig zurückgewonnen werden.

Dies äußert sich in der **Hysteresekurve** der plastischen Verformung: Die aufgewandte Spannung σ wird gegen die erzielte Dehnung ϵ bei einem Belastungsprozess, bei dem sich Dehnung und Kompression (Zug und Druck) abwechseln, aufgetragen (**Abb. 6.12**). **Spannungs-Dehnungs-Diagramm** (σ - ϵ -**Diagramm**): Bei einer vollständig elastischen Verformung wird sowohl bei der Dehnung als auch bei der Kompression die gleiche Kurve durchlaufen. Plastische Verformungen äußern sich durch das Auftreten einer Hysterese, d. h. zweier verschiedener Zweige der Kurve, die in verschiedenen Richtungen durchlaufen werden. Dabei bleibt auch bei verschwindender Spannung σ eine **Restdehnung** ϵ_1 oder **Restkompression** ϵ_2 übrig.

2. Plastische Verlustenergie

Die bei diesem Prozess verrichtete Arbeit ist der Fläche zwischen den beiden Kurven proportional:

Plastische Verlustenergie			ML²T⁻²
$W = V \oint \sigma d\epsilon$	Symbol	Einheit	Benennung
	W	J	Verlustenergie
	V	m ³	Volumen
	σ	N/m ²	Normalspannung
	ϵ	1	Dehnung

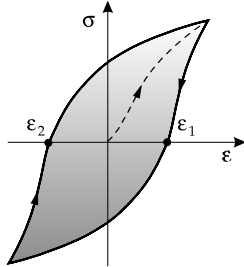


Abbildung 6.12: Hysteresekurve bei plastischer Verformung. Gestrichelte Kurve: Neukurve. Schraffierte Fläche: plastische Verlustenergie

- Plastische Verformungen spielen eine wichtige Rolle in der Materialbearbeitung (Pressen, Walzen, Biegen usw.).

6.1.3.1 Bereiche bei Zugbelastung

Das Verhalten von Materialien unter Zugbelastung wird mittels einer Prüfmaschine ermittelt und in einem **Spannungs-Dehnungs-Diagramm** aufgetragen (**Abb. 6.13**).

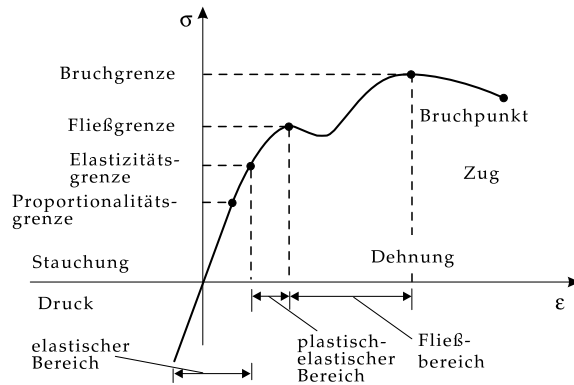


Abbildung 6.13: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

1. Zugbelastungsbereiche

Es lassen sich folgende Bereiche unterscheiden:

- a) **elastischer Bereich**, in dem die Dehnung bis zur Proportionalitätsgrenze dem Hookeschen Gesetz folgt und die Verformung wieder vollständig verschwindet, wenn die Spannung nicht mehr wirkt,
- b) **elastisch-plastischer Bereich**, in dem die Verformung nach Abklingen der Spannung nicht vollständig zurückgeht,
- c) **plastischer Bereich**, in dem die Verformung größtenteils auch ohne Spannung erhalten bleibt. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve flacht in diesem Bereich gewöhnlich ab; bei großen Dehnungen nimmt die erforderliche Spannung wieder ab, weil die innere Struktur des Körpers durch die Dehnung bereits weitgehend verändert wurde.
- d) **Bruchpunkt**, die Dehnung, bei der der Körper bricht (zerreißt).

2. Parameter und Eigenschaften der Zugbelastung

M Die Vermessung des Spannungs-Dehnungs-Diagramms erfolgt mit einer Prüfmaschine nach **DIN EN 10002** bei festgelegten äußeren Parametern wie der Temperatur und mit einem bestimmten Prüfungsablauf (Zuggeschwindigkeit usw.).

- Alle Materialkonstanten hängen von der Zusammensetzung des Stoffes ab. Dies gilt insbesondere bei Legierungen.

a) **Hookesche Gerade**, Tangente an die Spannungs-Dehnungs-Kurve im Nullpunkt. Ihre Steigung ist der **Elastizitätsmodul** E des Körpers für kleine Dehnungen.

Die Grenzen zwischen den Bereichen des Spannungs-Dehnungs-Diagramms werden durch **kritische Spannungen** beschrieben:

b) **Dehngrenze**, R_p , oder **Fließspannung**, σ_f , Spannung, bei der eine bestimmte Verformung als plastische zurückbleibt. Üblich ist die Angabe der 0.2 %-Dehngrenze $R_{p0.2}$, die man findet, wenn man zur Hookeschen Geraden eine Parallele zieht, die die Abszisse bei $\epsilon_f = 0.2\%$ schneidet. Der Schnittpunkt zwischen dieser Geraden und der Spannungs-Dehnungs-Kurve gibt die Dehngrenze an.

c) **Zugfestigkeit**, R_m , oder **Bruchspannung**, σ_B , die größte auftretende Spannung im Spannungs-Dehnungs-Diagramm. Treten an einem Körper größere Spannungen auf, so wird der Bruchpunkt erreicht und der Körper zerreißt.

- Typische Werte für Metalle sind 10 bis 20 N/mm²; bei gewöhnlichen Stählen können Werte von 400 bis 1200 N/mm² erreicht werden. Hochfeste Stähle erreichen bis zu 4500 N/mm².

d) **Streckgrenze (Fließgrenze)**, jener Punkt, über den hinaus die Zugkraft auch bei weiterer Ausdehnung nicht mehr ansteigt. Manche Materialien weisen einen nicht-monotonen Übergang zwischen elastischem und plastischem Bereich auf, d. h., die Spannung sinkt am Ende des elastischen Bereiches zunächst ab und nimmt dann wieder zu. In diesem Fall unterscheidet man eine obere und eine untere Streckgrenze, die den lokalen Minima der Spannungs-Dehnungs-Kurve entsprechen.

e) **Bruchdehnung**, ϵ_B , der Wert der Dehnung, bei der der Körper bricht.

- Typische Werte für die Bruchdehnung sind 0.02 (Kupfer) über 0.45 (V2A-Stahl) bis 0.5 (Aluminium und Gold).
- Bei plastischen Verformungen treten im Gegensatz zur elastischen Verformung keine (oder nur sehr kleine) Volumenänderungen auf. Dementsprechend muss für die Querdehnungszahl $\nu \approx 0.5$ gelten.

6.1.3.2 Knickung

1. Knickung und Knickspannung

Knickung, tritt auf, wenn ein Stab, der unter Druckspannung steht, seitlich ausweicht (**Abb. 6.14**).

Knickung tritt ein, wenn die wirkende Druckspannung σ die Knickspannung σ_k übersteigt.

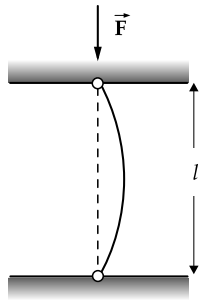


Abbildung 6.14: Knickung eines Stabes durch eine Kraft \vec{F} . Durch die Verformung des Stabes wird die Druckspannung zu einer Biegespannung, unter der der Stab sehr viel leichter nachgibt

Euler-Formel für die Knickspannung:

Knickspannung: Euler-Formel			$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$
$\sigma_k = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$	Symbol	Einheit	Benennung
	σ_k	N/m^2	Knickspannung
	E	N/m^2	Elastizitätsmodul
	λ	1	Schlankheitsgrad

► Beim Entwerfen von Maschinenteilen sind Sicherheitsfaktoren von 5 bis 10 einzurechnen.

2. Schlankheitsgrad und Sicherheitszahl

Schlankheitsgrad λ , beschreibt die Schlankheit eines Stabes:

$$\lambda = l \sqrt{\frac{A}{J_a}}$$

(l Stablänge, A Querschnittsfläche, J_a Flächenmoment).

■ Ein kreisrunder Stab mit dem Durchmesser 1 cm und der Länge 1 m hat das Flächenträgheitsmoment

$$J_a = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 = 0.049 \cdot (1 \text{ cm})^4 = 490 \text{ mm}^4$$

und damit den Schlankheitsgrad

$$\lambda = 1 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{79 \text{ mm}^2}{490 \text{ mm}^4}} = 400.$$

Bei einem Elastizitätsmodul von 200 GN/m^2 ergibt sich die Knickspannung zu

$$\sigma_k = \pi^2 \frac{200 \text{ GN/m}^2}{400^2} = 12.3 \text{ MN/m}^2.$$

Dies entspricht einer maximalen Belastung

$$F = \sigma_k \cdot A = 975 \text{ N}.$$

Bei einem Sicherheitsfaktor von 8 kann der Stab also mit 12 kg belastet werden.

Sicherheitszahl, bei Konstruktionsaufgaben das Verhältnis eines Spannungsgrenzwertes (Fließspannung, Bruchspannung, Knickspannung) zur vorhandenen Spannung. Typische Werte liegen zwischen 1.5 und 3.

6.1.3.3 Härte

1. Definition der Härte

Härte, der Widerstand eines Körpers gegen das Eindringen eines kleinen Probekörpers in seine Oberfläche. Bei einem solchen Vorgang treten an einer kleinen Stelle des Körpers hohe Spannungen auf, die zu einer lokalen Verformung führen.

Die Härte eines Stoffes wird mittels standardisierter Messverfahren bestimmt und durch eine Kennzahl bezeichnet. Alle Messverfahren basieren auf einem standardisierten Probekörper, der mit einer bestimmten

Kraft in einer bestimmten Zeit auf die Oberfläche gedrückt wird (**Abb. 6.15**). Aus der wirkenden Kraft, der Geometrie des Probekörpers und der Verformung kann die Härtezahl bestimmt werden (s. **Tab. 8.2**).

- Der Probekörper muss eine höhere Härte als der zu prüfende Stoff haben, um nicht selbst deformiert zu werden.

2. Brinell-Härte,

HB (DIN EN ISO 6506), der Probekörper ist eine Kugel. Die Brinell-Härte ist das Verhältnis der wirkenden Kraft F zur Größe der eingedrückten Oberfläche A , multipliziert mit einem Faktor 0.102:

$$HB = 0.102 \frac{F}{A}.$$

Der Faktor 0.102 rechnet die SI-Einheit N in die alte Einheit kp (Kilopond) um und stellt sicher, dass die alten Härtewerte unverändert auch im SI gebraucht werden können.

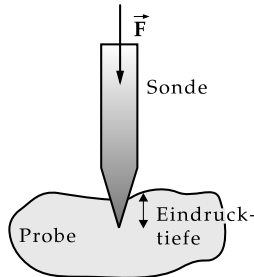


Abbildung 6.15: Härtemessung. Gemessen wird die Eindrucktiefe (d. h., die Abdruckfläche) einer genormten Sonde, die mit festgelegter Kraft \vec{F} eine bestimmte Zeit lang auf die Probe gedrückt wird

- Da runde Oberflächen nicht gut in feste Stoffe eindringen, kann dieses Verfahren nur bei weichen Werkstoffen angewandt werden.
- Die Härtewerte sind nur sinnvoll, wenn der Durchmesser des Abdrucks zwischen dem 0.2fachen und 0.7fachen des Durchmessers der Prüfkugel liegt.

3. Vickers-Härte,

HV (DIN EN ISO 6507), der Probekörper ist eine Diamantpyramide mit quadratischer Grundfläche. Wieder gibt man das Verhältnis von wirkender Kraft zu eingedrückter Oberfläche an, wobei sich letztere einfach aus der Diagonalen d des quadratischen Eindrucks bestimmen lässt:

$$HV = 0.102 \frac{F}{A} = 0.189 \frac{F}{d^2}.$$

- Vickers- und Brinell-Härte haben ungefähr den gleichen Zahlenwert. Die Vickers-Methode kann allerdings auch bei harten Stoffen angewandt werden und dient daher allgemein als Referenzverfahren.
- **DIN 50 150** sieht eine Beziehung zwischen der Vickers-Härte und der Zugfestigkeit R_m von Stahl vor: $R_m \approx 3.38 HV$.

4. Rockwell-Härte,

HR (DIN EN ISO 6508), mit einem standardisierten Probekörper (Rockwell-B: Stahlkugel mit Durchmesser 1.59 mm (1/16 Zoll), Rockwell-C: Diamantkegel, Kegelwinkel 120°) wird die Eindringtiefe bei einer vorgegebenen Kraft (Rockwell-B: 883 N, Rockwell-C: 1373 N) gemessen. Je $2 \mu\text{m}$ Eindringtiefe entsprechen einer Härteeinheit. Zur besseren Vergleichbarkeit ist bei beiden Verfahren eine Prüfvorkraft von 98 N vorgesehen. Rockwell-B wird für mittelharte Werkstoffe angewandt, Rockwell-C für sehr harte (gehärtete Stähle). Die Rockwell-Methode erlaubt eine automatisierte Härtemessung, ist aber weniger genau.

- Die Härte nach den verschiedenen Verfahren ist in gewissen Grenzen vergleichbar. Vergleichstabellen sind mit **DIN 50 150** gegeben.

6.2 Hydrostatik, Aerostatik

Hydrostatik (Aerostatik), die Lehre von den Eigenschaften der Flüssigkeiten (Gase) im ruhenden Zustand, im Gegensatz zur **Hydrodynamik (Aerodynamik)**, die sich mit strömenden Flüssigkeiten (Gasen) beschäftigt. Dabei wird der **Druck** und der daraus folgende **Auftrieb** als Kraftwirkung der Flüssigkeiten auf die in ihnen eingetauchten Körper eingeführt.

6.2.1 Flüssigkeiten und Gase

Flüssigkeit, Zustand der Materie, der durch die gegenseitige Verschiebbarkeit der Moleküle gekennzeichnet ist. Flüssigkeiten können beliebige Gestalt annehmen, doch bestehen zwischen den Molekülen noch erhebliche Kräfte (Kohäsionskräfte), die sich in der geringen Kompressibilität und in der Oberflächenspannung manifestieren.

Gas, Zustand der Materie, in dem zwischen den Molekülen nur noch geringe, kurzreichweitige Kräfte bei Zusammenstoßen wirken. Gase zeichnen sich durch hohe Kompressibilität (siehe Thermodynamik) sowie durch Fehlen von Oberflächenspannung und Kohäsion aus. Das Fließen von Gasen kann ebenfalls durch die Hydrodynamik beschrieben werden, wobei aber die hohe Kompressibilität und die daraus resultierenden Dichteschwankungen berücksichtigt werden müssen.

6.2.2 Druck

1. Definition des Drucks

Druck, Kraftwirkung pro Flächeneinheit auf ein kleines Flächenelement innerhalb einer Flüssigkeit. Durch die leichte Verschiebbarkeit der Flüssigkeitsmoleküle wirkt eine an einer Stelle ausgeübte Kraft im gesamten Flüssigkeitsvolumen nach allen Seiten mit der gleichen Größe. Die Normalkraft, die in einer ruhenden Flüssigkeit auf eine kleine Probefläche (z. B. einen Teil der Wand oder der Oberfläche eines untergetauchten Körpers) ausgeübt wird, ist überall gleich und unabhängig von der Ausrichtung der Probefläche (**isotroper Druck**, Abb. 6.16). Dies gilt nur, solange der Schweredruck (s. S. 163) vernachlässigt werden kann, Schubspannungen treten in Flüssigkeiten nicht auf.

$\text{Druck} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$				$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$
$p = \frac{F_N}{A}$	Symbol	Einheit	Benennung	
	p	Pa	Druck	
	F_N	N	wirkende Normalkraft	
	A	m^2	Fläche, auf die die Kraft wirkt	

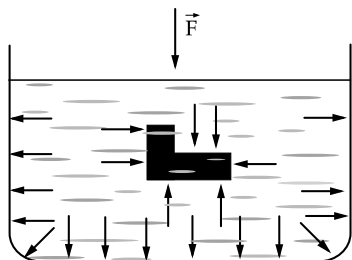


Abbildung 6.16: Isotroper Druck, dessen Kraftwirkung hier durch Pfeile dargestellt wird, wirkt gleichmäßig in alle Richtungen

2. SI-Einheit des Drucks,

Pascal, Pa, SI-Einheit des Drucks.

1 Pascal ist der Druck, bei dem auf eine Fläche von 1 m^2 eine Kraft von 1 N ausgeübt wird.

$$[p] = \text{Pa} = \text{Pascal} = \text{N/m}^2$$

- Der isotrope Druck ist keine vektorielle Größe; er wirkt in alle Richtungen gleichermaßen.
- Achtung! Für den Druck wird dasselbe Formelsymbol p wie für den Impuls gebraucht.

Atmosphärendruck, in Meereshöhe ungefähr $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

3. Druckmessung

M **Autoklav**, Druckgefäß zur Erzeugung sehr hoher Drücke ($1000 - 10000 \text{ bar}$).

Vakuumpumpe zur Erzeugung sehr niedriger Drücke (derzeit bis zu 10^{-11} bar).

Das Messverfahren basiert auf der Messung der Kraft, die aufgrund des Druckes auf eine bekannte Fläche wirkt, wobei beim **Manometer** die Kraftmessung durch Federn erfolgt, beim **Aneroid-Barometer** durch die Verformung einer luftleeren Blechdose, bei der **Bourdonschen Röhre** durch die Verformung eines Rohres, die direkt auf einen Zeiger übertragen werden kann. **Quecksilberbarometer**, misst den Druck durch Vergleich eines unbekanntes Drucks mit dem bekannten Schweredruck einer Flüssigkeit. Moderne Verfahren gebrauchen **piezoelektrische Elemente** (siehe Elektrotechnik), bei denen durch die Krafteinwirkung auf einen Kristall eine Spannung erzeugt wird.

6.2.2.1 Kolbendruck

1. Definition des Kolbendrucks

Kolbendruck, der Druck, der in einer Flüssigkeit zustandekommt, indem ein beweglicher Stempel in einen das Gefäß abschließenden Zylinder hineingedrückt wird (**Abb. 6.17**). Der Druck p der Flüssigkeit hebt im statischen Gleichgewicht gerade die äußeren Kräfte F_1 und F_2 auf. Daher gilt:

$$F_1 = A_1 p, \quad F_2 = A_2 p,$$

und damit

$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}, \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

- ▲ Der Kolbendruck ist in der ganzen Flüssigkeit gleich.

2. Hydraulische Presse,

eine Vorrichtung zum Verstärken von Kräften. Eine kleine äußere Kraft F_1 wirkt auf eine kleine Fläche A_1 , so dass an der großen Fläche A_2 eine große Kraft

$$F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1$$

nutzbar gemacht werden kann.

- Aus der Energieerhaltung folgt dann, dass der Kolbenhub an der großen Fläche um den Faktor A_1/A_2 geringer ist als an der kleinen Fläche. Dasselbe folgt aus der Eigenschaft der Inkompressibilität des Mediums.

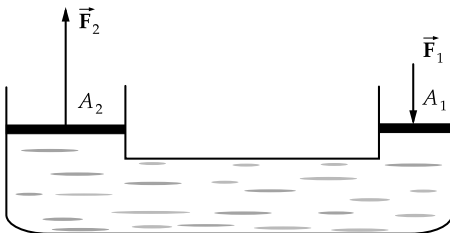


Abbildung 6.17: Kolbendruck bei der hydraulischen Presse

3. Hydraulik,

die Anwendung des Kolbenprinzips zur Kraftübertragung und -verstärkung in der Technik. Typische Anwendungen sind Flüssigkeitsbremsen, Hebebühnen und Druckwandler. Besonderer Vorteil ist die Möglichkeit, die Richtung der wirkenden Kraft zu verändern, ohne mechanische Elemente wie Hebel oder Rollen einzusetzen.

Gase sind im Gegensatz zu Flüssigkeiten sehr kompressibel. Die beim Komprimieren geleistete **Kompressionsarbeit** wird als **innere Energie** (siehe Thermodynamik) im Gas gespeichert und lässt sich an jeder Stelle und zu jeder Zeit entnehmen. Komprimierte Gase (Pressluft) dienen als Energieträger und zur Steuerung von Maschinen (**Pneumatik**).

6.2.2.2 Schweredruck in Flüssigkeiten

1. Definition des Schweredrucks

Schweredruck, der Druck, der in einer Flüssigkeit aufgrund ihres eigenen Gewichtes entsteht. Er ergibt sich aus der Kraft, die von einer Flüssigkeitssäule der Höhe h und des Volumens $V = hA$ auf ihre Grundfläche A ausgeübt wird:

Schweredruck			$ML^{-1}T^{-2}$
$p = \frac{\rho V g}{A} = h \rho g$	Symbol	Einheit	Benennung
	p	Pa	Schweredruck
	ρ	kg/m^3	Dichte der Flüssigkeit
	V	m^3	Volumen der Flüssigkeitssäule
	A	m^2	Grundfläche der Flüssigkeitssäule
	g	m/s^2	Fallbeschleunigung = $9.81 m/s^2$

- Eine Wassersäule von 10 m Höhe übt auf ihre Grundfläche einen Druck von $p = h \rho g = 10 m \cdot 1000 kg/m^3 \cdot 9.81 m/s^2 = 9.81 \cdot 10^4 Pa$ aus. Eine Quecksilbersäule (Dichte $13600 kg/m^3$), die den gleichen Druck ausübt, hat eine Höhe von $h = \frac{p}{\rho g} = \frac{9.81 \cdot 10^4 Pa}{13600 kg/m^3 \cdot 9.81 m/s^2} = 735 mm$.

Der Schweredruck in einer Flüssigkeit ist abhängig von der Tiefe, in der er gemessen wird. In einer Flüssigkeit ist der isotope Druck also nur in einer festen Tiefe überall gleich, nicht in verschiedenen Tiefen (**Abb. 6.18**).

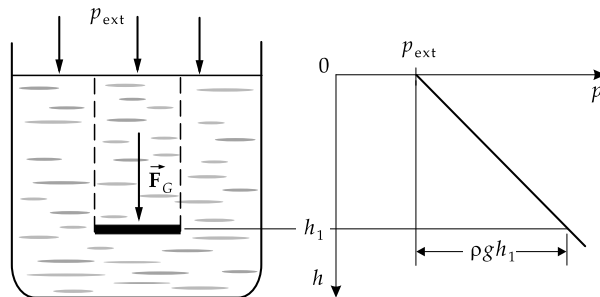


Abbildung 6.18: Schweredruck in einer Flüssigkeit. p_{ext} : äußerer Druck

2. Hydrostatisches Paradoxon,

der Druck am Boden eines Gefäßes hängt nur von der Füllhöhe, aber nicht von der Form des Gefäßes und damit auch nicht von der Flüssigkeitsmenge ab (**Abb. 6.19**).

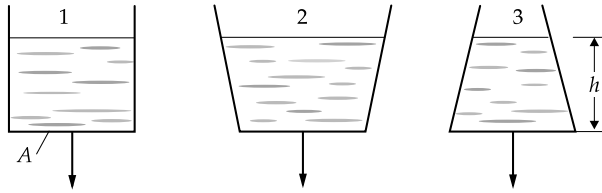


Abbildung 6.19: Hydrostatisches Paradoxon. Der Druck auf den Boden der Fläche A ist bei gleicher Füllhöhe h unabhängig von der Form der Gefäße 1, 2, 3

3. Manometer

M **Quecksilbermanometer**, Messgerät zur Messung von Drücken durch Vergleich mit dem Schweredruck einer Flüssigkeitssäule. Auf der einen Seite des Manometers wirkt der zu messende Druck p und der Schweredruck $\rho g h_1$ (ρ Dichte, g Fallbeschleunigung, h_1 Höhe), auf der anderen Seite der Schweredruck der Flüssigkeitssäule $\rho g h_2$ und ein Vergleichsdruck p_0 . Im Gleichgewicht gilt

$$p - p_0 = \rho g (h_2 - h_1).$$

Der Druckunterschied ist also dem Höhenunterschied proportional. Je schwerer die Flüssigkeit, desto höher ist der messbare Druck; daher benutzt man Quecksilber zur Messung des Luftdrucks. In seiner einfachsten Ausführung besteht das Manometer aus einem oben geschlossenen Glasrohr, dessen unteres Ende in Quecksilber getaucht ist. Der Vergleichsdruck, d. i. der Druck in dem am oberen Ende entstehenden Hohlraum, ist der Dampfdruck des Quecksilbers und sehr gering (Vakuum). Diese Anordnung zur Messung des Luftdrucks nennt man **Barometer**. Die **Abb. 6.20** zeigt das Barometer nach Torricelli.

4. Kommunizierende Röhren

In mehreren verbundenen Röhren steigt die Flüssigkeit auf die gleiche Höhe, wenn überall der gleiche äußere Druck wirkt (**Abb. 6.21**). Dabei sind Kapillarkräfte vernachlässigt.

M Manometer auf Basis von kommunizierenden Röhren können insbesondere zur Messung von kleinen Druckdifferenzen eingesetzt werden.

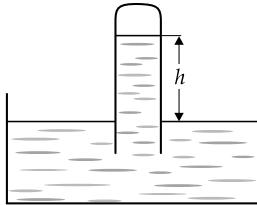


Abbildung 6.20: Einfachste Form des Manometers: Barometer zur Messung des Luftdrucks nach Torricelli. Die Steighöhe im Schauglas ist proportional zum Atmosphärendruck

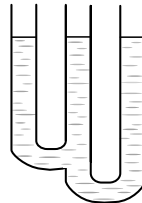


Abbildung 6.21: Kommunizierende Röhren

6.2.2.3 Kompressibilität

1. Definition der Kompressibilität

Kompressibilität, die Veränderung eines Flüssigkeitsvolumens aufgrund einer Druckänderung. Sie ist definiert als das Verhältnis der relativen Volumenveränderung zur Druckänderung:

Kompressibilität			$M^{-1}LT^2$
$\kappa = \frac{\Delta V}{V\Delta p}$	Symbol	Einheit	Benennung
	κ	$1/\text{Pa} = \text{m}^2/\text{N}$	Kompressibilität
	ΔV	m^3	Volumenabnahme
	V	m^3	ursprüngliches Volumen
	Δp	Pa	Druckzunahme

Typische Kompressibilitäten liegen in der Größenordnung von 10^{-9} 1/Pa (s. **Tab. 8.3/4**).

- Wasser hat bei Normbedingungen (Temperatur 0°C und Druck 101.325 kPa) die Kompressibilität $0.5 \cdot 10^{-9}$ 1/Pa. Unter dem Druck der Erdatmosphäre von 10^5 Pa ändert sich das Volumen von 1 m^3 Wasser um
 $\Delta V = \kappa V \Delta p = 0.5 \cdot 10^{-9} \text{ 1/Pa} \cdot 1 \text{ m}^3 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 = 50 \text{ cm}^3$.

2. Volumenausdehnungskoeffizient

Raumausdehnungskoeffizient, γ , beschreibt die Ausdehnung einer Flüssigkeit bei einer Erhöhung ihrer Temperatur. Die relative Ausdehnung eines Flüssigkeitsvolumens ist proportional zur Temperaturerhöhung, solange diese klein gegen die ursprüngliche Temperatur ist.

Volumenausdehnungskoeffizient			1
$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \Delta \theta$	Symbol	Einheit	Benennung
	$\Delta V/V$	1	relative Volumenänderung
	γ	1/K	Volumenausdehnungskoeffizient
	$\Delta \theta$	K	Temperaturänderung

Der Volumenausdehnungskoeffizient hat die Einheit 1/K. Er hängt von der Temperatur des Stoffes ab und wird üblicherweise auf die Temperatur $\theta_0 = 0^\circ\text{C}$ (273.15 K) bezogen.

- Wasser hat den Volumenausdehnungskoeffizienten $\gamma = 0.18 \cdot 10^{-3}$ 1/K bei 20°C . Andere Flüssigkeiten erreichen das Mehrfache davon. Für ideale Gase gilt bei dieser Temperatur

$$\gamma = \frac{1}{\theta_0} = 3.4 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}.$$

6.2.2.4 Schweredruck in Gasen

1. Berechnung des Schweredruckes in Gasen

Bei der Berechnung des Schweredruckes in Gasen muss die Kompressibilität des Gases berücksichtigt werden. Die Dichte ρ eines Gases bei einem Druck p ist durch die Proportionalität

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0}$$

gegeben, wenn ρ_0 die Dichte bei einem Bezugsdruck p_0 ist. Die Änderung des Druckes Δp bei einer Zunahme Δh der Höhe über dem Boden der Gassäule ist

$$\Delta p = -\frac{\Delta mg}{A} = -\rho g \Delta h.$$

(A Querschnittsfläche der Gassäule, Δm Masse in der Schicht Δh , g Fallbeschleunigung). Dieser Ausdruck kann in ein Integral umgeschrieben werden:

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = - \int_0^{h_1} \frac{\rho_0 g}{p_0} dh,$$

(p_0 Druck am Boden, p_1 Druck in der Höhe h_1). Integration ergibt mit $p = p_1, h = h_1$:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0 g}{p_0} h.$$

2. Barometrische Höhenformel

Aus dem Schweredruck folgt die **Barometrische Höhenformel** (Abb. 6.22):

Barometrische Höhenformel			
	Symbol	Einheit	Benennung
$p = p_0 e^{-Ch}$	p	Pa	Druck in der Höhe h
	h	m	Höhe
	C	1/m	Konstante
$C = \frac{\rho_0 g}{p_0}$	p_0	Pa	Druck am Boden
	ρ_0	kg/m ³	Dichte am Boden
	g	m/s ²	Fallbeschleunigung

Der Druck in einer Gassäule (insbesondere in der Erdatmosphäre) fällt exponentiell mit der Höhe ab. Die Konstante C hat für Luft den Wert

$$C = 0.1256/\text{km}$$

für einen Druck von $p_0 = 101.3$ kPa am Boden bei einer Temperatur von 0°C .

▲ Für je ca. 8 m Höhenzuwachs in Bodennähe nimmt der Luftdruck um $100\text{ Pa} = 1\text{ mbar}$ ab.

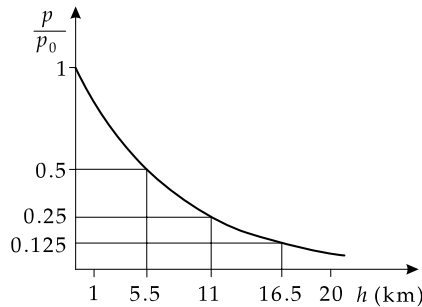


Abbildung 6.22: Lösung der barometrischen Höhenformel

3. Internationale Höhenformel

In die barometrische Höhenformel ist die Abnahme der Temperatur mit der Höhe nicht einbezogen. Berücksichtigt man diese, so erhält man die **Internationale Höhenformel**:

$$p = \left(1 - \frac{0.00651 \cdot h/\text{m}}{288}\right)^{5.255} \cdot 101.325 \text{ kPa}.$$

Diese Formel ist bis zu Höhen von 11 km gültig. Für die Dichte der Luft gilt:

$$\rho = \left(1 - \frac{0.00651 \cdot h/\text{m}}{288}\right)^{4.255} \cdot 1.2255 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

4. Normatmosphäre

Der Luftdruck weist Schwankungen von ca. 10 % je nach Wetterlage und Temperatur auf. **Normaldruck** und **Normaldichte** der Luft sind in Meereshöhe bei 15°C im Jahresdurchschnitt

$$p_0 = 101.325 \text{ kPa}, \quad \rho_0 = 1.293 \text{ kg/m}^3$$

(früher: 760 Torr, 1 atm = physikalische Atmosphäre). Dies ist die **Normatmosphäre** nach **DIN 5450**.

6.2.2.5 Pumpen

Pumpen, Maschinen zur Förderung von Flüssigkeiten und Gasen.

1. Pumpenarten

a) Kolbenpumpe, ein Kolben saugt durch ein **Saugventil** Flüssigkeit an, die beim Zurückgehen des Kolbens durch ein **Druckventil** austritt (insbesondere zum Antrieb durch Kraftmaschinen, oft als doppelt wirkende Kolbenpumpe ausgeführt) (**Abb. 6.23**).

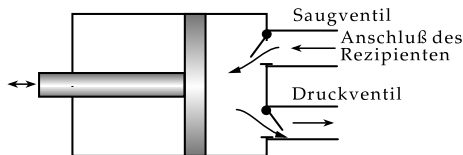


Abbildung 6.23: Prinzip der Kolbenpumpe. Der sich hin- und herbewegende Kolben saugt abwechselnd Flüssigkeit aus dem Rezipienten an und drückt sie wieder in die Umgebung hinaus

b) Membranpumpe, anstelle des Kolbens wird eine Membran verwendet (z. B. für ätzende Flüssigkeiten, Kraftstoffpumpen).

c) Flügelpumpe, ein oder mehrere in einem Zylinder angebrachte Flügel bewegen sich anstelle des Kolbens hin und her; Druckventile befinden sich in den Flügeln, Saugventile im Ansaugrohr (meist zum Handbetrieb).

d) Zahnradpumpe, ineinandergreifende Zahnräder drücken die Flüssigkeit von einer Seite zur anderen (häufigste Bauform für Schmiermittelpumpen).

e) Kreiselpumpe, auch **Schleuder-** oder **Zentrifugalpumpe**, Flüssigkeit tritt in der Mitte ein, wo sie von den Schaufeln erfasst, beschleunigt und aufgrund der Zentrifugalkraft nach außen geschleudert wird (Wasserpumpen für große Fördermengen, Antrieb durch Elektromotor als Turbopumpe) (**Abb. 6.25**).

f) Wasserstrahlpumpe, ein aus einer Düse ausströmender Wasserstrahl saugt die Luft aus dem Rezipienten (siehe Saugeffekte strömender Flüssigkeiten).

g) Dampfstrahlpumpe, ein austretender Dampfstrahl fördert Wasser.

h) Diffusionspumpe, zur Erzeugung von Hochvakuum. Ein Treibmittel wird im Vorvakuum verdampft, es steigt auf, nimmt dabei die abzupumpenden Gasmoleküle durch Diffusion in den Treibdampfstrahl mit und wird nach Kondensation an den gekühlten Wänden zurückgeführt (meist als **Quecksilberdiffusionspumpe**) (**Abb. 6.24**).

i) Molekularpumpe, eine Turbopumpe, die Gasmoleküle durch Zusammenstöße mit einer rotierenden Scheibe in Raumbereiche höheren Druckes bringt.

j) Getterpumpe, für Ultrahochvakuum, Pumpwirkung durch Adsorption von Restgasmolekülen an einem Zusatzstoff (Getter).

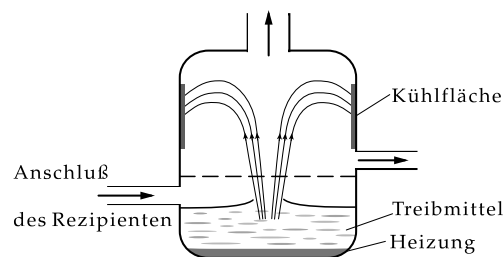


Abbildung 6.24: Diffusionspumpe

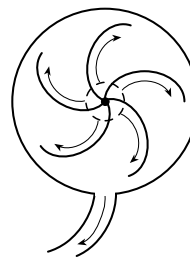


Abbildung 6.25: Kreiselpumpe. Die Saugleitung ist axial angeschlossen

2. Pumpenparameter und -eigenschaften

Rezipient, das zu evakuierende Gefäß.

Förderhöhe, H , die maximale Höhe, um die eine Pumpe eine Flüssigkeit nach oben fördern kann. Sie ist eine Kenngröße der Pumpe und bestimmt sich aus dem verfügbaren Pumpendruck, der den Druck einer Wassersäule dieser Höhe ausgleichen kann. Damit ist sie auch bestimmend für die in einem Rohr erzielbare Strömungsgeschwindigkeit. Je nach Bauart ist die Förderhöhe vom Förderstrom abhängig.

Förderstrom, Q , das pro Zeiteinheit geförderte Volumen der zu pumpenden Flüssigkeit. Er wird von der Größe der Pumpe und der erzielten Strömungsgeschwindigkeit bestimmt.

Pumpenkennlinie, ein Diagramm der Förderhöhe in Abhängigkeit vom Förderstrom. Im allgemeinen fällt die Pumpenkennlinie bei höheren Förderströmen ab.

Förderleistung, P_Q , die von der Pumpe verrichtete Hebearbeit je Zeiteinheit. Sie ist das Produkt aus Gravitationskraft pro Volumen ρg , Volumenstrom Q und Förderhöhe H :

$$P_Q = g\rho HQ.$$

Wirkungsgrad einer Pumpe, das Verhältnis von erzielter Förderleistung P_Q zu verbrauchter mechanischer Leistung P_0 :

$$\eta = \frac{P_Q}{P_0}.$$

3. Saug- und Druckpumpen

Saugpumpen, nutzen den Luftdruck der Atmosphäre aus, indem sie ein Unterdruckgebiet schaffen (z. B. durch Volumenexpansion bei Bewegung eines Kolbens). Die Saugwirkung entsteht dann aufgrund des Druckunterschieds zwischen dem Atmosphärendruck und dem Unterdruckgebiet. Der maximale Pumpendruck ist damit der Luftdruck der Atmosphäre und die maximale Förderhöhe für Wasser etwa 10 m.

Druckpumpen, arbeiten unabhängig vom Luftdruck direkt im Medium.

4. Turbinen

Turbine, die Umkehrung der Pumpe. In ihr wird Energie der Strömung in mechanische Bewegungsenergie (Rotationsenergie) umgewandelt (z. B. zum Betrieb von Generatoren). Im Gegensatz zur Kolbenmaschine geschieht dies nicht auf dem Umweg über eine Kolbenbewegung, vielmehr wird eine Welle direkt von der Strömung angetrieben.

Wasserrad, älteste Vorrichtung zur Umsetzung von Strömungsenergie in mechanische Energie. Beim oberflächigen Wasserrad fällt das Wasser von oben auf die Schaufeln herab, beim unterschlächtigen strömt es unter dem Wasserrad und nimmt die Schaufeln mit. Wirkungsgrad 80 bis 85 %. Leistung:

$$P = g\rho Qh,$$

(g Fallbeschleunigung, ρ Dichte der Flüssigkeit, Q Volumenfluss, h Fallhöhe).

a) Wasserturbine, wichtigste Wasserkraftmaschine zur Gewinnung von Energie aus Wasserströmung. Bei der **Freistrahlturbine** trifft ein Wasserstrahl die am **Lauftrad** angebrachten Schaufeln, bei der **Kaplan-** und der **Francis-Turbine** tritt das Wasser von außen durch Leitschaufeln in die Schaufeln des Leitrades ein, wo es seine Bewegungsenergie bei der Bewegung von außen nach innen abgibt und an der Achse abgeleitet wird. Leistungen bis 250 MW.

b) Dampfturbine, zur Erzeugung von Energie in Wärmekraftwerken. Der Dampf wird in feststehenden Leiträdern zunächst entspannt (was bei Wasserturbinen wegen der Inkompressibilität nicht stattfindet) und dabei auf hohe Geschwindigkeit beschleunigt, dann treibt er ein oder mehrere Laufräder an. Die verschiedenen Bauformen werden durch den Geschwindigkeits- und Druckverlauf in der Turbine charakterisiert.

c) Gasturbine, zum Antrieb durch Verbrennungsabgase. Kombination aus eigentlicher Turbine, die durch die heißen Abgase einer Verbrennung angetrieben wird, und einem der Verbrennung vorgeschalteten, auf der gleichen Welle sitzenden **Verdichter**, der Luft in den Brennraum drückt. Anwendung bei Flugzeugen als **Turboprop-Triebwerk**, wobei auf der Welle auch ein Propeller sitzt, und **Strahltriebwerk** ohne Luftschaube; zum Antrieb von Generatoren; seltener zum Antrieb von Fahrzeugen. Vorteil ist die einfache

Bauform mit wenigen bewegten Teilen, niedriges Leistungsgewicht, hohe Drehzahlen (bis 20 000 U/min), Wirkungsgrad bis zu 35 % bei mehrstufigen Anlagen, billige Brennstoffe.

6.2.3 Auftrieb

1. Auftriebskraft

Auftrieb, eine entgegen der Erdanziehung gerichtete Kraft auf alle Körper, die in einer Flüssigkeit (oder einem Gas) untergetaucht sind. Sie ergibt sich aus dem Schweredruckunterschied zwischen der Ober- und der Unterseite des Körpers der gleichen Fläche A (Abb. 6.26). Befindet sich die Oberseite des Körpers in der Tiefe h_1 und die Unterseite in einer Tiefe h_2 , so gilt

$$F_A = F_2 - F_1 = A(p_2 - p_1) = A \rho_{Fl} g (h_2 - h_1),$$

(ρ_{Fl} Dichte der Flüssigkeit, p_1, p_2 Druck in der Höhe h_1 bzw. h_2 , F_1, F_2 Kraft auf Oberseite bzw. Unterseite des Körpers, F_A Auftriebskraft, g Fallbeschleunigung). Die Größe $A(h_2 - h_1)$ ist das vom Körper verdrängte Flüssigkeitsvolumen V . Daher gilt:

Auftriebskraft	MLT ⁻²		
	Symbol	Einheit	Benennung
$F_A = \rho_{Fl} g V$	F_A	N	Auftriebskraft
$= m_{\text{verd}} g = F_{G,\text{verd}}$	ρ_{Fl}	kg/m ³	Dichte der Flüssigkeit
$= \frac{\rho_{Fl}}{\rho_K} F_G$	g	m/s ²	Fallbeschleunigung (9.81 m/s ²)
	V	m ³	Volumen des Körpers
	m_{verd}	kg	verdrängte Flüssigkeitsmasse
	$F_{G,\text{verd}}$	N	Gewichtskraft von m_{verd}
	ρ_K	kg/m ³	Dichte des Körpers
	F_G	N	Gewichtskraft des Körpers

- Die Dichte des Körpers ist die mittlere Dichte des gesamten Körpers, d. h., Gesamtmasse durch Gesamtvolumen.

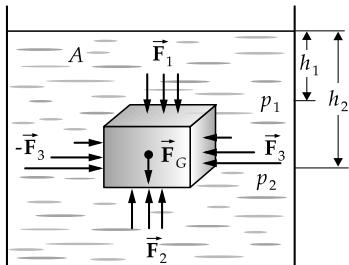


Abbildung 6.26: Zum Auftrieb. Die seitlichen Kräfte \vec{F}_3 heben sich auf; die Kraft \vec{F}_2 (unten) überwiegt die Kraft \vec{F}_1 (oben)

2. Archimedisches Prinzip und Eigenschaften des Auftriebs

Archimedisches Prinzip, die Auftriebskraft, die ein Körper in einer Flüssigkeit erfährt, ist der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich.

- Diese Regel gilt auch für Körper, die nur teilweise untergetaucht sind.

Es sind drei Möglichkeiten für die Auftriebskraft zu unterscheiden:

$F_A < F_G$: Der Körper sinkt nach unten. Seine Dichte ist größer als die der Flüssigkeit.

$F_A = F_G$: Der Körper schwebt. Seine Dichte ist gleich der der Flüssigkeit.

$F_A > F_G$: Der Körper schwimmt und taucht nur teilweise unter. Seine Dichte ist kleiner als die der Flüssigkeit.

- Ein Körper mit kleinerer Dichte als die der Flüssigkeit bleibt trotzdem auf dem Boden eines Gefäßes liegen, wenn keine Flüssigkeit zwischen Boden und Körper eindringen kann.
- Eisen hat die 7.8fache Dichte des Wassers. Ein Körper aus Eisen hat also die Auftriebskraft

$$F_A = \frac{\rho}{\rho_{\text{Körper}}} F_G = \frac{1}{7.8} F_G = 0.13 F_G,$$

also 13 % seines Gewichtes. Unter Wasser ist das effektive Gewicht von Eisen nur 87 % seines echten Gewichtes.

Die effektive Gewichtskraft, die auf einen untergetauchten Körper wirkt, ist die um den Auftrieb verminderte tatsächliche Gewichtskraft:

$$F_{\text{eff}} = F_G - F_A = \left(1 - \frac{\rho_{Fl}}{\rho_K}\right) F_G.$$

Ein Körper erfährt auch in der Luft einen Auftrieb, der der Gewichtskraft der verdrängten Luft entspricht.

3. Ballon,

Flugkörper, der durch Auftriebskraft in der Luft gehalten wird. Die Auftriebskraft wird durch Füllung des Ballons mit einem Gas, das eine kleinere Dichte als die Luft der Atmosphäre hat (erhitzte Luft, Helium, früher: Wasserstoff), erzeugt.

4. Dichtemessung mit der Mohrsche Waage

Der Auftrieb kann benutzt werden, um die Dichte eines festen Körpers ρ_K zu messen. Dazu misst man die Ausgleichskraft, die notwendig ist, um eine Waage im Gleichgewicht zu halten, wenn sich der Körper in der Flüssigkeit, F_{Fl} , und in der Luft, F_G , befindet (**Mohrsche Waage, Abb. 6.27**). Dann ist die Differenz gleich der Differenz der Auftriebskräfte,

$$F_G - F_{Fl} = F_{A,Fl} - F_{A,Luft} = (\rho_{Fl} - \rho_{Luft}) V g \approx \rho_{Fl} V g,$$

($F_{A,Fl}$ Auftriebskraft in der Flüssigkeit, $F_{A,Luft}$ Auftriebskraft in Luft, ρ_{Fl} Dichte der Flüssigkeit, ρ_{Luft} Dichte der Luft, V Volumen des Körpers, g Fallbeschleunigung). Im allgemeinen kann man die Dichte der Luft gegen die der Flüssigkeit vernachlässigen. Dividiert man dann auf beiden Seiten durch

$$F_G = \rho_K V g = m g,$$

(m Masse des Körpers) so ergibt sich:

$$\rho_K = \frac{\rho_{Fl}}{1 - \frac{F_{Fl}}{m g}}.$$

- Dichtebestimmung auf diese Art ist nur möglich, wenn der Körper nicht schwimmt, seine Dichte also größer ist als die der Flüssigkeit.

Ist die Dichte des Körpers geringer als die der Flüssigkeit, so fügt man am Körper ein Hilfsgewicht hinzu und ersetzt die Ausgleichskraft in der Flüssigkeit F_{Fl} durch die Differenz $F_H - F_{Fl}$ der Ausgleichskraft für das Hilfsgewicht allein, F_H , und zusammen mit dem Körper, F_{Fl} :

$$\rho_K = \frac{\rho_{Fl}}{1 - \frac{F_H - F_{Fl}}{m g}}.$$

Umgekehrt lässt sich die Dichte der Flüssigkeit mit einem Körper bekannter Dichte bestimmen. Durch Umstellen der obigen Formel findet man

$$\rho_{Fl} = \rho_K \left(1 - \frac{F_{Fl}}{m g}\right).$$

Sind die Ausgleichskräfte $F_{Fl,1}$ und $F_{Fl,2}$ der Waage für das Untertauchen desselben Körpers in zwei Flüssigkeiten verschiedener Dichten ρ_1 und ρ_2 bekannt, so gilt für das Verhältnis der Dichten:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1 - \frac{F_{Fl,1}}{m g}}{1 - \frac{F_{Fl,2}}{m g}}.$$

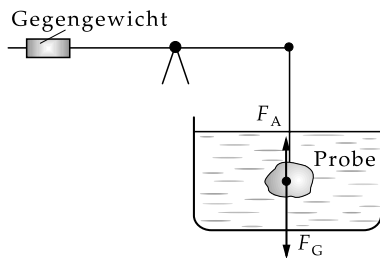


Abbildung 6.27: Messung der Dichte mit der Mohrschen Waage

5. Dichtebestimmung durch Eintauchtiefe

Ein anderes Verfahren zur Dichtebestimmung einer Flüssigkeit beruht auf der Eintauchtiefe eines schwimmenden Körpers. Hat dieser die Querschnittsfläche A , die Höhe H und taucht eine Tiefe von h ein, so lautet die Kräftebilanz (bei konstanter Querschnittsfläche):

$$0 = F_A - F_G = hA\rho_{Fl}g - HA\rho_Kg.$$

Daraus folgt

$$\rho_{Fl} = \frac{H}{h}\rho_K.$$

Die Dichte eines schwimmenden Körpers lässt sich ebenfalls nach dieser Methode bestimmen:

$$\rho_K = \frac{h}{H}\rho_{Fl}.$$

6.2.4 Kohäsion, Adhäsion, Oberflächenspannung

1. Kohäsion,

die Eigenschaft von Flüssigkeiten und Festkörpern, zusammenzuhängen und dabei nicht abreißende Fäden oder Schichten zu bilden. Sie entsteht durch anziehende Kräfte zwischen den Molekülen, die ihren Ursprung in der ungleichen Ladungsverteilung (Polarisierung) in den Molekülen und der daraus folgenden elektrostatischen Anziehung haben (siehe **van-der-Waalsse Kräfte**, S. 605). Die Kohäsionskräfte bei Gasen sind viel geringer und haben nur in der Nähe des Siedepunktes einen großen Einfluss.

- **Heber (Abb. 6.28).** Sobald die Flüssigkeit den höchsten Punkt des Rohres überwunden hat, wird sie von der Schwerkraft in die andere Hälfte des Rohres herabgezogen. Die Kohäsion bewirkt, dass der Flüssigkeitsfaden nicht abreißt. Bei einem Gas ist dies nicht möglich: die Dichte des Gases im Rohr nimmt gemäß der barometrischen Höhenformel ab.

2. Oberflächenspannung,

durch die Kräfte im Innern der Flüssigkeit (**Abb. 6.29**) an ihrer Oberfläche hervorgerufene Kraft. Innerhalb der Flüssigkeit wirken die Kohäsionskräfte in alle Richtungen isotrop, da jedes Molekül in jeder Richtung gleichermaßen von anderen Molekülen umgeben ist. An der Oberfläche dagegen wirkt eine resultierende Kohäsionskraft nach innen, der ein Druck im Innern der Flüssigkeit entgegenwirken muss.

Oberflächenenergie, die aus der Oberflächenspannung resultierende potentielle Energie.

Die Oberflächenspannung wirkt einer Vergrößerung der Oberfläche entgegen. Um die Oberfläche um einen Betrag ΔA zu vergrößern, ist eine Arbeit ΔW erforderlich. Das Verhältnis der Arbeit ΔW zur gewonnenen Oberfläche ΔA heißt Oberflächenspannung σ :

Oberflächenspannung			MT^{-2}
$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A}$	Symbol	Einheit	Benennung
	σ	$\text{J/m}^2 = \text{kg/s}^2 = \text{N/m}$	Oberflächenspannung
	ΔW	J	verrichtete Arbeit
	ΔA	m^2	gewonnene Oberfläche

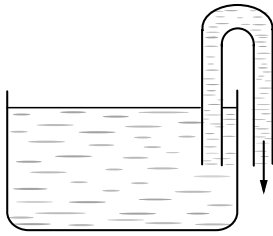


Abbildung 6.28: Heber. Durch die Kohäsionskräfte und den Schweredruck wird die Flüssigkeit aus dem Gefäß gezogen

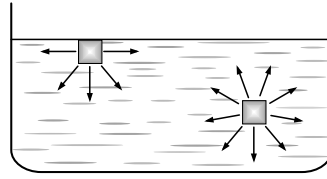


Abbildung 6.29: Oberflächenspannung. Die Kohäsionskräfte heben sich nur im Innern der Flüssigkeit auf

- Typische Werte für die Oberflächenspannung sind 0.02 N/m bei Kohlenwasserstoffen, 0.07 N/m bei stark polarisierten Molekülen wie Wasser oder Glycerol, beim Extremfall Quecksilber 0.49 N/m. Die Oberflächenspannung hängt von der Temperatur des Stoffes ab. Sie reagiert sehr empfindlich auf Verunreinigungen durch bestimmte Substanzen (Detergentien).

3. Messung der Oberflächenspannung

M Die Messung der Oberflächenspannung erfolgt mit einem Drahtbügel der Länge d (Abb. 6.30), der in die Flüssigkeit getaucht wird und beim Herausziehen um den Betrag Δs eine dünne Flüssigkeitshaut der Oberfläche $\Delta A = 2d \Delta s$ bildet. Wird der Drahtbügel mit der Kraft F aus der Flüssigkeit gezogen, so ist die zum Herausziehen der Flüssigkeitshaut benötigte Arbeit $\Delta W = F \Delta s$. Daher gilt:

$$\sigma = \frac{\Delta W}{\Delta A} = \frac{F \Delta s}{2d \Delta s} = \frac{F}{2d}.$$

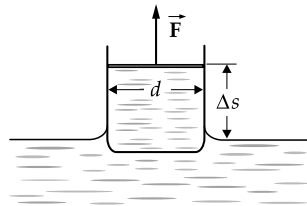


Abbildung 6.30: Messung der Oberflächenspannung. Mit einem Drahtbügel wird eine Flüssigkeitshaut gezogen und die Kraft \vec{F} gemessen

4. Spezifika der Oberflächenspannung

Die Oberflächenspannung stellt eine Kraft pro Längeneinheit der Randlinie dar.

- ▲ Die Kraft F_σ , die aufgrund der Oberflächenspannung auf eine Randlinie der Länge l wirkt, ist $F_\sigma = l \sigma$.
- Ein System versucht stets, den Zustand kleinster potentieller Energie einzunehmen. Aus diesem Grund ist die Oberfläche einer Flüssigkeit stets eine **Minimalfläche**, d. h., die Flüssigkeitsoberfläche ist bei gegebenem Volumen so klein wie möglich.
- Der Körper mit der kleinsten Oberfläche bei einem gegebenen Volumen ist die Kugel. Wirken keine anderen Kräfte, so nimmt ein Flüssigkeitstropfen Kugelform an. Sonderfall: Seifenblase.

6.2.4.1 Kapillarität

1. Adhäsion,

bezeichnet die Anziehungskräfte zwischen den Molekülen zweier **verschiedener** Stoffe, im Unterschied zur Kohäsion zwischen Molekülen gleicher Stoffe. Sie kann zwischen festen, flüssigen und gasförmigen Stoffen auftreten. Insbesondere sind bei der Berührung einer Flüssigkeit (Tropfen) mit einem festen Stoff

(Unterlage) folgende Fälle zu unterscheiden, je nachdem, in welchem Verhältnis die Stärken der Kohäsions- und der Adhäsionskräfte stehen (**Abb. 6.31**):

- die Adhäsionskräfte überwiegen: die Flüssigkeit breitet sich auf der Oberfläche aus (**Benetzung**),
- die Kohäsionskräfte überwiegen: die Flüssigkeit zieht sich zusammen (**keine Benetzung**).

Randwinkel ϕ , der Winkel, den die Flüssigkeitsoberfläche am Berührungspunkt mit der Unterlage bildet. Für benetzende Flüssigkeiten gilt $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Bei einer nichtbenetzenden Flüssigkeit gilt $\pi/2 < \phi \leq \pi$.

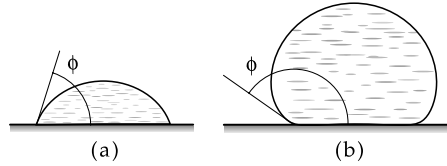


Abbildung 6.31: Berührung von Flüssigkeitstropfen mit einer festen Oberfläche. (a): Benetzung, Randwinkel $\phi < \pi/2$, (b): keine Benetzung, Randwinkel $\phi > \pi/2$

2. Kapillarität,

die Erscheinung, dass eine Flüssigkeit in einem engen Röhrchen (**Kapillare**) aufsteigt (**Abb. 6.32**). Ihre Ursache ist die Oberflächenspannung an der Randlinie der Flüssigkeit und die aus ihr resultierende Kraft $F_\sigma = \sigma l = \sigma \cdot 2\pi r$ (l : Umfang). Sie wird durch das Gewicht der Flüssigkeitssäule $F_G = mg = \rho \cdot h \cdot \pi r^2$ (m Masse der Flüssigkeitssäule) ausgeglichen. Aus $F_G = F_\sigma$ ergibt sich:

Kapillarsteighöhe (Kapillaraszension)			L
$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}$	Symbol	Einheit	Benennung
	h	m	Steighöhe
	σ	N/m	Oberflächenspannung
	ρ	kg/m ³	Dichte der Flüssigkeit
	g	m/s ²	Fallbeschleunigung
	r	m	Innenradius des Röhrchens

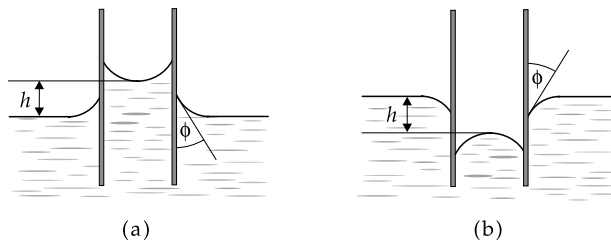


Abbildung 6.32: Kapillarität. (a): Kapillaraszension, (b): Kapillardepression

- In einer Kapillare vom Innendurchmesser 1 mm steigt Wasser (Oberflächenspannung 0.07 N/m, Dichte 1000 kg/m³) bis in die Höhe

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r} = \frac{2 \cdot 0.07 \text{ N/m}}{9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 0.5 \text{ mm}} = 29 \text{ mm}.$$

- ▶ Die Steighöhe hängt für einen gegebenen Stoff nur vom Radius des Röhrchens ab.
- ▶ Aus der Kapillaraszension (-depression) lässt sich die Oberflächenspannung der Flüssigkeit ermitteln.

Benetzungsenergie, $E_{\text{Benetzung}}$, Maß für die Stärke der Adhäsion. Die Benetzungsenergie wird beim Benetzen einer Oberfläche des Flächeninhalts A frei. Sie kann aus dem Randwinkel ϕ und der Oberflächenspannung σ berechnet werden:

$$E_{\text{Benetzung}} = A\sigma(1 + \cos \phi).$$

6.3 Hydrodynamik, Aerodynamik

Strömungsmechanik, die Lehre von den Strömungen in Flüssigkeiten (**Hydrodynamik**) und Gasen (**Aerodynamik**). Sie beschreibt den Transport von Materie aufgrund von Druckdifferenzen und äußeren Kräften unter Berücksichtigung der inneren Reibung der Flüssigkeit. Gase unterscheiden sich auch hier von Flüssigkeiten durch ihre hohe Kompressibilität. Ist die Strömungsgeschwindigkeit jedoch deutlich kleiner als die Schallgeschwindigkeit (ca. ein Drittel), so verhalten sich auch Gase praktisch inkompressibel.

Zentraler Begriff der Strömungsmechanik ist das Strömungsfeld.

6.3.1 Strömungsfeld

1. Definition des Strömungsfeldes

Jedes Masseteilchen einer strömenden Flüssigkeit hat in einem gegebenen Moment eine nach Betrag und Richtung bestimmte Geschwindigkeit. Grundannahme der Hydrodynamik ist, dass die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen in einem kleinen Volumen ungefähr gleich ist. Damit kann man jedem Ort in der Flüssigkeit eine mittlere Geschwindigkeit \vec{v} der Masseteilchen, die sich in einem Volumenelement um diesen Ort befinden, zuordnen. Die so entstehende räumliche und zeitliche Geschwindigkeitsverteilung heißt **Geschwindigkeitsfeld** $\vec{v}(x,y,z,t)$. Analog führt man dazu das **Druckfeld** $p(x,y,z,t)$, das **Temperaturfeld** $T(x,y,z,t)$ und das **Dichtefeld** $\rho(x,y,z,t)$ ein.

- ▶ Diese Beschreibung gilt nur im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht (s. S. 628). Nur dann lassen sich Druck und Temperatur sinnvoll definieren und über die Zustandsgleichung eine Beziehung zur Dichte herstellen. Die Beschreibung von Flüssen, die sich nicht im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht befinden, ist Gegenstand der **kinetischen Theorie (Transporttheorie)**.

2. Eigenschaften des Geschwindigkeitsfeldes

Das Geschwindigkeitsfeld ist ein Vektorfeld; sein Wert $\vec{v}(x,y,z,t)$ gibt die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen an, die sich zur Zeit t in einem kleinen Volumen um den Ort (x,y,z) befinden. Man unterscheidet zeitunabhängige (stationäre) und zeitabhängige (nichtstationäre) sowie ortsabhängige (inhomogene) und ortsunabhängige (homogene) Strömungen. Bei stationären Strömungen gilt:

$$\vec{v} = \vec{v}(x,y,z), \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

Stromlinien und **Bahnlinien** dienen zur Visualisierung des Strömungsfeldes. **Stromlinien** folgen in einem gegebenen Zeitpunkt den Geschwindigkeitsvektoren, d. h., eine an eine Stromlinie gelegte Tangente gibt die Strömungsrichtung in diesem Punkt an (**Abb. 6.33**). Von ihnen zu unterscheiden sind **Bahnlinien**, die die tatsächliche Bewegung der Materieteilchen über einen Zeitraum beschreiben.

- ▲ Bei stationären Strömungen stimmen Strom- und Bahnlinien überein.

Die mathematische Beschreibung von Strömungen erfolgt mit den Mittel der **Vektoranalysis**.

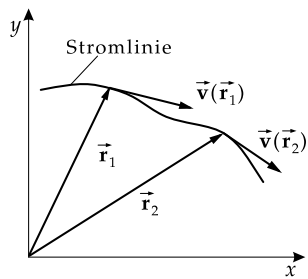


Abbildung 6.33: Stromlinie. Der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(\vec{r})$ bildet die Tangente im Punkt \vec{r} an die Stromlinie

3. Beispiele für Stromlinienbilder

Im Stromlinienbild charakterisiert die endliche Liniendichte n (n : Anzahl der Stromlinien, die die Flächeneinheit durchsetzen) die Strömungsgeschwindigkeit: $n \sim |\vec{v}|$.

Stromröhre, schlauchförmiges Raumgebiet, dessen Mantellinien mit den Stromlinien übereinstimmen. Bei einer stationären Strömung wird die Wand der Stromröhre von der Flüssigkeit nicht durchbrochen.

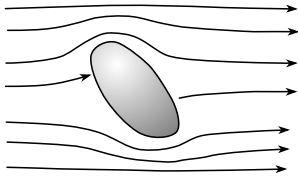


Abbildung 6.34: Strömungsfeld einer umströmten Platte

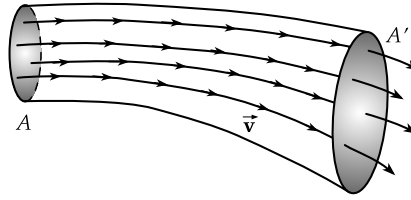


Abbildung 6.35: Geschwindigkeitsfeld. Stromlinien in einer Stromröhre mit den Querschnitten A und A'

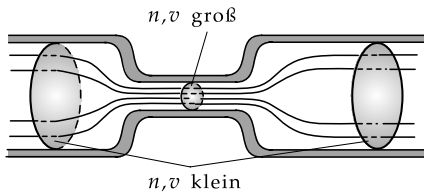


Abbildung 6.36: Stromliniendichte n in einem Rohr mit variablem Querschnitt

6.3.2 Grundgleichungen idealer Strömungen

Ideale Flüssigkeit, Flüssigkeit, die inkompressibel ist und keine Reibung aufweist. In einer idealen Flüssigkeit entstehen keine Wirbel, $\text{rot } \vec{v} = 0$. Wie der Name andeutet, handelt es sich um eine physikalisch nicht realisierbare Idealisierung.

Ideale Strömung, eine inkompressible Strömung, in der keine Reibungskräfte auftreten.

- **Ideale Gase** sind Gase, deren Kompressibilität dem idealen Gasgesetz folgt. Die Strömung von realen Gasen ist keine ideale Strömung.

6.3.2.1 Kontinuitätsgleichung

1. Aufstellung der Kontinuitätsgleichung

Kontinuitätsgleichung, drückt die Erhaltung der Masse aus. Man betrachtet dazu (**Abb. 6.37**) eine Röhre mit der Querschnittsfläche A , die von der Flüssigkeit durchströmt wird. Die Masse Δm aller Teilchen, die in einer Zeit Δt durch die Fläche A hindurchtreten, ist gegeben durch das Produkt aus der Fläche, dem Zeitintervall, der Dichte ρ der Flüssigkeit und der Geschwindigkeit \vec{v} der Flüssigkeit:

$$\Delta m = \rho v A \Delta t.$$

An einer anderen Stelle der Röhre, für die Querschnittsfläche und Geschwindigkeit die Werte A' bzw. \vec{v}' haben, muss pro Zeiteinheit die gleiche Masse hindurchfließen, wenn keine Masse vernichtet oder erzeugt werden kann (**Massen-Erhaltungssatz**). Dann gilt

$$\rho v A = \rho' v' A'.$$

Inkompressible Flüssigkeit: $\rho = \rho'$, und damit

Kontinuitätsgleichung inkompressibler Flüssigkeiten			$L^3 T^{-1}$
$vA = v'A'$	Symbol	Einheit	Benennung
	v, v'	m/s	Geschwindigkeiten
	A, A'	m ²	Querschnittsflächen

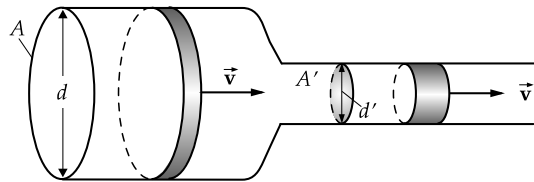


Abbildung 6.37: Fluss in einer Röhre mit variierendem Querschnitt A

- ▲ Je kleiner der Querschnitt eines Rohres, desto größer ist die Geschwindigkeit der darin strömenden Flüssigkeit.

Volumenstrom, Stromstärke, Bezeichnung für die Größe $Q = vA$, $[Q] = \text{m}^3/\text{s}$. Volumen der Flüssigkeit, das pro Zeiteinheit ein Rohr mit der Querschnittsfläche A durchströmt. **Stromdichte, Massenströmdichte**, Bezeichnung für den Vektor $\vec{j} = \rho \vec{v}$.

- Eine analoge Kontinuitätsgleichung gilt für die Erhaltung der elektrischen Ladung bei elektrischen Strömen in der Elektrodynamik. Allgemein drückt eine Kontinuitätsgleichung immer die Erhaltung einer physikalischen Größe aus.

2. Kontinuitätsgleichung in differentieller Form

- ▲ Das in einem gegebenen Zeitintervall in einen kleinen, im Raum feststehenden Würfel hineinfließende Flüssigkeitsvolumen ist gleich dem im gleichen Zeitintervall hinausfließenden Volumen.

Daraus folgt die **differentielle Formulierung der Kontinuitätsgleichung**: Der Volumenstrom $Q_{\text{ein},x}$ durch die Stirnfläche eines Quaders senkrecht zur x -Richtung ist gegeben durch

$$Q_{\text{ein},x} = v_x(x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z.$$

Hier bedeuten Δx , Δy und Δz die Kantenlängen des Quaders. Der Volumenstrom durch die gegenüberliegende Fläche ist

$$Q_{\text{aus},x} = v_x(x + \Delta x) \cdot \Delta y \cdot \Delta z.$$

Nach dem Satz von Taylor gilt

$$v_x(x + \Delta x) \approx v_x(x) + \frac{\partial v_x(x)}{\partial x} \Delta x.$$

Die gleiche Behandlung für die y - und die z -Richtung liefert den gesamten Volumenstrom durch den Quader,

$$\Delta Q = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z.$$

Die Größe in Klammern heißt **Divergenz** des Vektorfeldes \vec{v} :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Mit ihr lässt sich die Kontinuitätsgleichung differentiell formulieren:

Kontinuitätsgleichung in differentieller Form			LT ⁻¹
div $\vec{v} = 0$	Symbol	Einheit	Benennung
	\vec{v}	m/s	Geschwindigkeitsfeld

3. Geschwindigkeitspotential, Laplace- und Poisson-Gleichung

Die Lösung der Kontinuitätsgleichung kann durch Einführung eines **Geschwindigkeits-** oder **Strömungspotentials** Φ erfolgen. Das Geschwindigkeitspotential ist ein skalares Feld. Die Stromlinien stehen senkrecht auf den Flächen $\Phi = \text{const}$. Der **Gradient** von Φ ist ein Vektorfeld, das an jedem Punkt in die Richtung des steilsten Anstiegs von Φ zeigt. Der Gradient des Geschwindigkeitspotentials Φ ist das Geschwindigkeitsfeld \vec{v} :

$$\operatorname{grad} \Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \vec{v}.$$

Nach Einsetzen von Φ lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 0.$$

Die Gleichung heißt **Laplace-Gleichung**. Wenn auf der rechten Seite der Gleichung statt der Null eine endliche Quelldichte q auftritt, ergibt sich die **Poisson-Gleichung**:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = -4\pi q.$$

Laplace-Operator, Skalarprodukt des **Nablaoperators** $\vec{\nabla}$ mit sich selbst, Summe über alle partiellen zweiten Ableitungen,

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Für die Lösung der Laplace-Gleichung bei gegebenen Randbedingungen (**Randwertproblem**) existiert ein umfangreiches analytisches und numerisches Instrumentarium.

4. Helmholtz-Bedingung

Die Darstellung eines Flusses durch ein Potential Φ ist nur möglich, wenn der Fluss **wirbelfrei** ist, d. h., wenn keine geschlossenen Stromlinien auftreten. Für ein stationäres Strömungsfeld bedeutet dies, dass kein Teilchen in der Flüssigkeit einem geschlossenen Pfad folgt. Die Wirbeleigenschaft des Strömungsfeldes kann in der Vektoranalysis durch die **Rotation** $\operatorname{rot} \vec{v}$ des Geschwindigkeitsfeldes

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

ausgedrückt werden. Wenn die Rotation des Geschwindigkeitsfeldes überall verschwindet, so ist die Strömung wirbelfrei,

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0.$$

Dies ist die **Helmholtz-Bedingung**.

5. Quellen und Senken

Quelle oder **Senke**, Raumgebiet, in dem Stromlinien beginnen (Quelle) oder enden (Senke). Die Anzahl der Stromlinien, die durch eine Fläche, welche die Quelle (Senke) umschließt, eintreten, ist nicht gleich der Anzahl der Stromlinien, die durch diese Fläche austreten. Für die Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes gilt dann:

$$\operatorname{div} \vec{v} = q, \quad q: \text{Quelldichte}, \quad q > 0: \text{Quelle}, \quad q < 0: \text{Senke}.$$

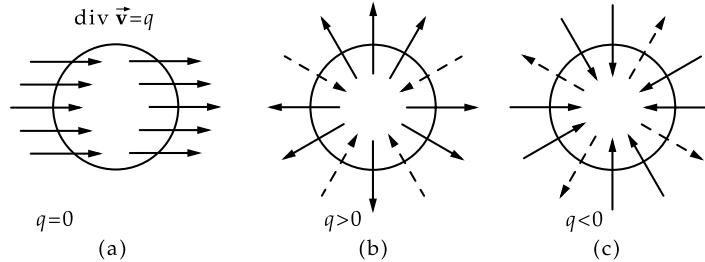


Abbildung 6.38: Divergenz des Geschwindigkeitsfeldes. (a): Quellenfreie Strömung, (b): Quelle $q > 0$, (c): Senke $q < 0$

6.3.2.2 Eulersche Gleichung

Eulersche Gleichung, beschreibt die inkompressible, reibungsfreie Strömung. Sie ist Ausdruck des Newtonschen Kraftgesetzes:

$$\rho \cdot \left((\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \equiv \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \operatorname{grad} p.$$

Auf der rechten Seite der Gleichung stehen die auf die Flüssigkeit wirkende Kraft pro Volumeneinheit \vec{F} , zum Beispiel die Gravitationskraft, und der Gradient des Drucks, in dessen Richtung die Druckkraft wirkt. Auf der linken Seite steht die **substantielle** oder **mitbewegte Ableitung** des Geschwindigkeitsfeldes nach der Zeit,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \operatorname{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

Sie gibt die Änderung der Geschwindigkeit eines kleinen Volumenelements in einem sich mit der Flüssigkeit bewegenden Bezugssystem an. Damit steht auf der linken Seite der Gleichung die Beschleunigung, auf der rechten Seite stehen die wirkenden Kräfte:

- die äußere Kraft pro Volumeneinheit \vec{F} ,
- die Druckkraft pro Volumeneinheit entlang dem Druckgradienten $-\operatorname{grad} p$.
- Im Falle von Strömungen mit Reibung wird die Euler-Gleichung zur Navier-Stokes-Gleichung (s. S. 187).

6.3.2.3 Gesetz von Bernoulli

1. Gesetz von Bernoulli,

stellt einen Zusammenhang zwischen dem Querschnitt eines Rohres und dem in ihm herrschenden Druck her. Man unterscheidet:

- **statischer Druck**, der sowohl senkrecht zur Strömungsrichtung als auch in Strömungsrichtung gleichermaßen wirkt,
 - **Schweredruck (geodätischer Druck)**, der dem hydrostatischen Druck in einer Flüssigkeitssäule entspricht,
 - **dynamischer Druck, Staudruck**, der aufgrund der Strömung zusätzlich wirkt. Der Staudruck hängt von der Geschwindigkeit der Strömung ab.
- In einer fließenden Flüssigkeit ist daher der Druck in verschiedenen Richtungen verschieden groß. Er ist **nicht isotrop**. Der statische Druck ist gerade der isotope Anteil des Gesamtdruckes.
- ▲ **Gesetz von Bernoulli:**
Die Summe aus statischem und dynamischem Druck ist in einer stationären Strömung konstant.

2. Ableitung der Bernoullischen Gleichung

Das Gesetz von Bernoulli folgt aus der Erhaltung der Energie. Hat ein Flüssigkeitsvolumen ΔV an einer Stelle, wo der Querschnitt der Röhre A beträgt, eine kinetische Energie $\frac{1}{2}\rho\Delta Vv^2$ (ρ Dichte, v Geschwindigkeit) und an einer anderen Stelle mit dem Querschnitt A' die kinetische Energie $\frac{1}{2}\rho\Delta Vv'^2$, so muss die Differenz der beiden,

$$\Delta W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\rho\Delta V(v'^2 - v^2),$$

im Druckunterschied und im Unterschied der potentiellen Energien $\Delta V\rho g(h - h')$ (h, h' entsprechende Höhen) begründet sein.

Druckenergie, W_p , die Arbeit, die aufgebracht werden muss, um das Volumen ΔV beim Druck p in das Rohr hineinzupressen:

$$W_p = pA\Delta s = p\Delta V.$$

Dann gilt:

$$\Delta W_{\text{kin}} = \Delta V(p - p') + \Delta V\rho g(h - h'),$$

und daher schließlich:

Bernoulli-Gleichung	$\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$		
	Symbol	Einheit	Benennung
$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const.}$	p	Pa	statischer Druck
	ρ	kg/m ³	Dichte
	v	m/s	Strömungsgeschwindigkeit
	g	m/s ²	Fallbeschleunigung
	h	m	Höhe

Der erste Term ist der statische Druck, der zweite der dynamische Druck, der dritte der Schweredruck (**Abb. 6.39**).

- Die Bernoulli-Gleichung gilt für stationären, reibungsfreien Fluss und ist daher eine Idealisierung.

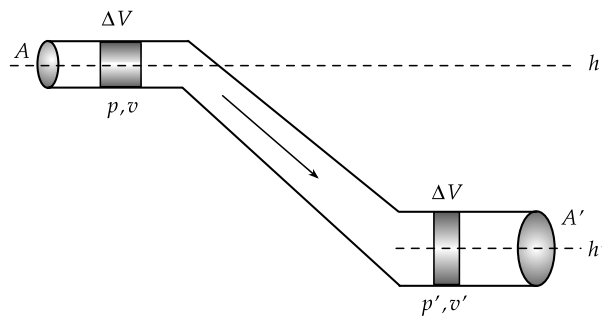


Abbildung 6.39: Zur Bernoulli-Gleichung

3. Messverfahren nach dem Bernoullischen Gesetz

Düse, Kanalverengung in Strömungsrichtung zur Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit. Grundlegendes Hilfsmittel zur Umsetzung von Druckenergie in Geschwindigkeitsenergie. Anwendung in Turbinen, Schubdüsen.

Diffusor, Kanalerweiterung. Umkehrung der Düse: Geschwindigkeitsenergie der anströmenden Flüssigkeit wird in Druckenergie umgewandelt. Anwendung in Strömungspumpen.

Die Kontinuitäts- und die Bernoulligleichung sind die Grundlage mehrerer Verfahren zur Druckmessung (Abb. 6.40):

- M** **Drucksonde**, zur Messung des statischen Drucks. Dieser wird an einer Öffnung im Mantel des Rohres abgegriffen und durch kommunizierende Röhren oder andere Elemente gemessen.
- M** **Pitot-Rohr**, zur Messung des statischen und dynamischen (Stau-)Drucks. Der Druck entsteht an der Mündung eines gegen die Strömungsrichtung zeigenden Rohres.
- M** **Prandtl'sches Staurohr**, vereinigt Pitot-Rohr und Drucksonde. Misst den Staudruck als Differenz von Gesamtdruck und statischem Druck. Bei bekannter Dichte ρ kann aus dem Staudruck p_s die Strömungsgeschwindigkeit v berechnet werden, $v = \sqrt{2p_s/\rho}$.

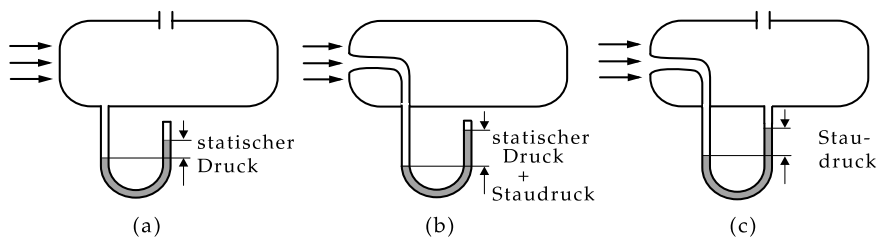


Abbildung 6.40: Druckmessverfahren auf Basis des Bernoullischen Gesetzes. (a): Drucksonde (stat. Druck), (b): Pitot-Rohr (stat. Druck und Staudruck), (c): Prandtl'sches Staurohr (Staudruck)

4. Venturi-Rohr,

(Drosselgerät), zur Ermittlung des Volumenstroms Q nach dem Venturi-Prinzip (s. S. 183). Dabei wird die Differenz des statischen Drucks vor und in einer Rohrverengung gemessen. Der statische Druck ist umso

geringer, je schneller die Flüssigkeit fließt (**Abb. 6.41**):

$$Q = A_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{(A_1/A_2)^2 - 1}} \cdot \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}},$$

$$= A_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{(A_1/A_2)^2 - 1}} \cdot \sqrt{2g\Delta h}$$

(A_1 Rohrquerschnitt, A_2 verengter Querschnitt, Δp Druckunterschied, ρ Dichte der Flüssigkeit, g Fallbeschleunigung, Δh Höhendifferenz im Steigrohr).

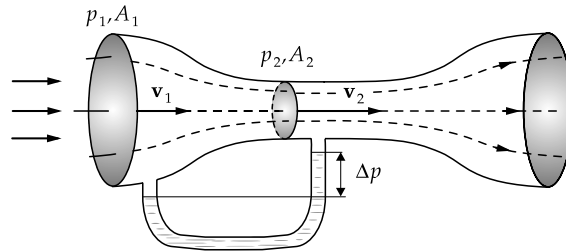


Abbildung 6.41: Venturi-Rohr zur Messung des Volumenstroms nach der Bernoulli-Gleichung

- Bei realen Strömungen muss die Reibung berücksichtigt werden. In der Praxis erfolgt dies durch Korrekturfaktoren, die über eine Eichung bestimmt werden.

6.3.2.4 Torricellisches Ausflussgesetz

1. Ausflussgeschwindigkeit

Die Ausflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit aus einem kleinen Loch im Mantel des Gefäßes unter dem Einfluss der Gewichtskraft ergibt sich aus der Bernoulli-Gleichung. Vergleicht man ein kleines Flüssigkeitsvolumen an einem beliebigen Punkt im Gefäß (Höhe h_1 , in Ruhe) mit einem am Ausflusspunkt (Höhe h_2 , Geschwindigkeit v), so gilt unter Berücksichtigung des Atmosphärendrucks p_0

$$\rho g h_1 + p_0 = \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v^2 + p_0,$$

und damit:

Ausflussgeschwindigkeit $\sim \sqrt{\text{Höhe}}$			LT^{-1}
	Symbol	Einheit	Benennung
$v = \sqrt{2gh}$	v	m/s	Ausflussgeschwindigkeit
	g	m/s ²	Fallbeschleunigung
	h	m	Höhe der Flüssigkeitssäule über Austrittsöffnung

2. Torricellisches Ausflussgesetz

Die Ausflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeitssäule der Höhe h_1 über der Austrittsöffnung ist gleich der Fallgeschwindigkeit eines Körpers aus der Höhe h_1 (**Abb. 6.42**).

Horizontale Entfernung L des Strahls von der Gefäßwand in der Höhe h_2 unter der Austrittsöffnung:

$$L = 2\sqrt{h_1 \cdot h_2}.$$

Befindet sich die Ausflussöffnung im Boden des Behälters, dann ergibt sich die Ausflussgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2gh}.$$

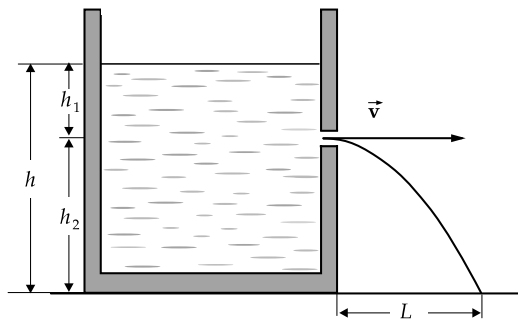


Abbildung 6.42: Torricellisches Ausflussgesetz. Die Ausflussgeschwindigkeit v hängt von der Höhe h_1 des Flüssigkeitsspiegels über der Ausflussöffnung ab

Wirkt auf die Flüssigkeitsoberfläche der zusätzliche Druck p_{ext} , dann gilt für die Ausflussgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2 \left(gh + \frac{p_{\text{ext}}}{\rho} \right)}.$$

3. Ausströmgeschwindigkeit

Durch die gleiche Überlegung findet man für die **Ausströmgeschwindigkeit** aus einem Rohr, in dem der Überdruck p gegenüber dem Außenraum herrscht:

Ausströmgeschwindigkeit			LT^{-1}
	Symbol	Einheit	Benennung
$v = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$	v	m/s	Ausströmgeschwindigkeit
	p	Pa	Überdruck
	ρ	kg/m ³	Dichte

- Bei diesen Betrachtungen wurde die Flüssigkeitsreibung (s. Viskosität S. 186) vernachlässigt. Sie kann durch die **Geschwindigkeitsziffer** ϕ berücksichtigt werden (Wasser: $\phi \approx 0.97$). Weiter tritt eine Einschnürung des Strahls beim Austreten auf, die durch die **Kontraktionszahl** α berücksichtigt wird (scharfkantige Ausflussöffnung: $\alpha \approx 0.61$). Das Produkt beider Größen heißt **Ausflusszahl** μ , $\mu = \phi \alpha$. Die nach den obigen Formeln berechneten Werte für Ausflussgeschwindigkeit v und Entfernung L sind mit der Ausflusszahl μ zu multiplizieren, um die Viskosität der Flüssigkeit und die Eigenschaften der Ausflussöffnung einzubeziehen.

4. Überfall,

Ausfluss einer Flüssigkeit über die Kante des Gefäßes, z. B. bei Schleusen in Flüssen (**Abb. 6.43**). Der Volumenstrom Q ist

$$Q = \frac{2\kappa}{3} \cdot h \cdot b \cdot \sqrt{2gh},$$

(h Durchflusshöhe, b seitliche Breite, g Fallbeschleunigung). Die Kontraktionszahl κ kann nach Schweizer Normen wie folgt bestimmt werden:

$$\kappa = 0.615 \cdot \left(1 + \frac{1}{1.6 + 1000h} \right) \left(1 + 0.5 \frac{h^2}{H^2} \right), \quad h \text{ in m.}$$

Gültig für Fallhöhe $H - h \geq 0.3$ m, Pegel $H \geq 2h$ und Durchflusshöhe $h = 0.025$ m ... 0.8 m.

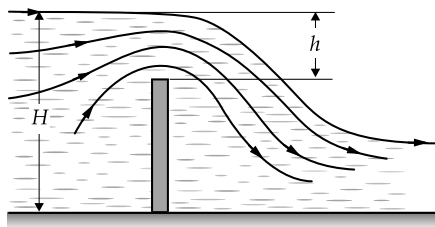


Abbildung 6.43: Überfall. Ausfluss einer Flüssigkeit über eine Kante

6.3.2.5 Saugeffekte

Aufgrund des Bernoullischen Gesetzes ist der statische Druck in einer Strömung kleiner als der statische Druck in der Umgebung. Dies bewirkt **Saugeffekte** bei Strömungen:

- ▲ **Venturi-Prinzip**, durch Verkleinerung des Rohrquerschnitts und die daraus resultierende Beschleunigung der Strömung kann der statische Druck im Rohr kleiner werden als der umgebende Atmosphärendruck, so dass eine andere Flüssigkeit angesaugt werden kann.

a) **Wasserstrahlpumpe**, zum Ansaugen eines Gases durch eine Flüssigkeit (**Abb. 6.44**). Die mit hoher Geschwindigkeit durch eine Düse ausströmende Flüssigkeit (Wasser, Quecksilber) führt zu einem verminderten statischen Druck, wodurch das Ansaugen des Gases aus dem Rezipienten bewirkt wird. **Quecksilberdampfmaschinen** dieser Bauart sind in der Vakuumtechnik üblich; sie erreichen Drücke bis $1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}$. Der erreichbare Druck ist durch den Dampfdruck der Flüssigkeit begrenzt.

b) **Zerstäuber**, zum Ansaugen einer Flüssigkeit in einen Luftstrom (**Abb. 6.45**). Die Spitze des Zerstäubers ragt in einen Luftstrom hinein. Da dessen statischer Druck geringer ist als der auf die Flüssigkeitsoberfläche wirkende Druck der ruhenden Luft, wird die Flüssigkeit angesaugt.

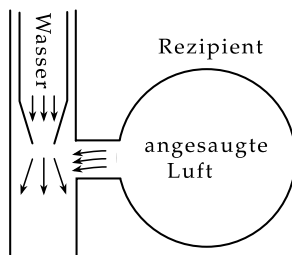


Abbildung 6.44: Wasserstrahlpumpe

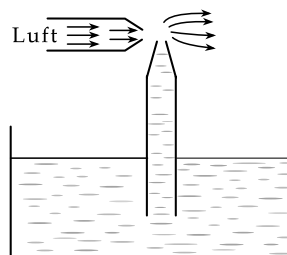


Abbildung 6.45: Zerstäuber

c) **Hydrodynamisches Paradoxon**: Eine ausströmende Flüssigkeit oder ein ausströmendes Gas kann eine direkt auf die Ausströmöffnung gesetzte Platte ansaugen (**Abb. 6.46**). Dies geschieht, wenn die Ausströmgeschwindigkeit so groß ist, dass der äußere Druck größer wird als der verbleibende statische Druck der zwischen Austrittsrohr und Platte strömenden Flüssigkeit. Aufgrund dieses Effektes ziehen sich zwei dicht nebeneinander fahrende Fahrzeuge an.

6.3.2.6 Auftrieb an umströmten Körpern

1. Auftrieb

Auftrieb an einem umströmten Körper, entsteht aufgrund des Bernoullischen Gesetzes, wenn die Strömungsgeschwindigkeit auf verschiedenen Seiten eines Körpers verschieden groß ist. Dann entsteht auf der Seite mit der höheren Geschwindigkeit ein **Unterdruck**, und auf der anderen Seite ein **Überdruck**.

Magnus-Effekt (**Abb. 6.47**), ein in einer strömenden Flüssigkeit rotierender Zylinder erfährt eine senkrecht zur Strömung wirkende Kraft. Aufgrund der Rotation wird die Strömung auf der einen Seite des Zylinders

abgebremst, auf der anderen beschleunigt, wodurch verschiedene statische Drücke auf beiden Seiten entstehen.

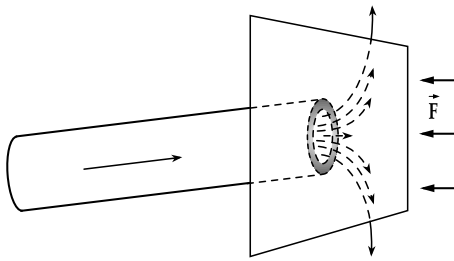


Abbildung 6.46: Hydrodynamisches Paradoxon.
Eine Platte wird von einem aus einem Rohr auftreffenden Strahl angesaugt

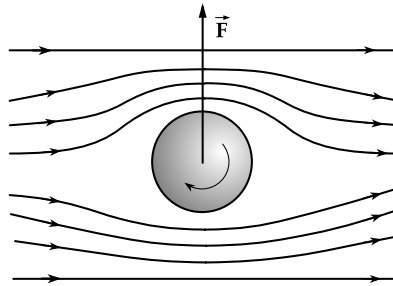


Abbildung 6.47: Magnus-Effekt

2. Auftriebskraft

Flügel, ein angeströmter Körper in einem Strömungsfeld, der so geformt ist, dass die Umströmungsgeschwindigkeit auf der Oberseite größer ist als auf der Unterseite. Durch den entstehenden Druckunterschied erfährt der Körper eine **dynamische Auftriebskraft**:

Dynamische Auftriebskraft			MLT^{-2}
$F_A = c_A \frac{\rho}{2} A v^2$	Symbol	Einheit	Benennung
	F_A	N	dynamische Auftriebskraft
	c_A	1	Auftriebsbeiwert
	ρ	kg/m ³	Dichte der Flüssigkeit
	v	m/s	Strömungsgeschwindigkeit
	A	m ²	max. Projektionsfläche

Die Auftriebskraft ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit (vgl. Reibungskraft) und zu einer typischen Flächenausdehnung. Letztere ist hier die größte Fläche bei einer Projektion des Flügels auf eine beliebige Ebene (Spannweite mal Spanntiefe) (**Abb. 6.48**).

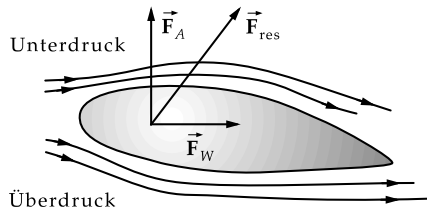


Abbildung 6.48: Auftriebskraft \vec{F}_A an einem umströmten Flügel. Auftriebskraft \vec{F}_A und Widerstandskraft \vec{F}_W addieren sich zur resultierenden Kraft \vec{F}_{res} .

- Der Auftriebsbeiwert wird im Windkanal bestimmt. Typische Werte liegen zwischen 0.02 und 0.05.
- Bei der Berechnung von Flugzeugen ist neben der Auftriebskraft auch die **Widerstandskraft** F_W zu berücksichtigen,

$$F_W = c_w \frac{\rho}{2} A v^2, \quad c_w: \text{Widerstandsbeiwert}.$$

Dies führt zu einer resultierenden Kraft F_{res} , die nach oben und nach hinten zeigt. Ihr Angriffspunkt heißt **Druckpunkt**. Er kann aus dem vom **Anstellwinkel** abhängigen Drehmoment auf den Flügel im Windkanal bestimmt werden. Der nach hinten wirkende Anteil der Kraft wird durch die Vortriebskraft der Triebwerke kompensiert.

6.3.3 Reale Strömungen

Reale Strömungen unterscheiden sich von idealen Strömungen im Auftreten von Reibung. Man unterscheidet

- **laminare Strömung**, die sich von der Strömung einer idealen Flüssigkeit im wesentlichen durch eine veränderte Geschwindigkeit unterscheidet,
- **turbulente Strömung**, die nicht mehr stationär ist und bei der sich an einem festgehaltenen Raumpunkt Richtung und Geschwindigkeit der Flüssigkeitsbewegung ungeordnet ändern.

6.3.3.1 Innere Reibung

Innere Reibung, durch Kohäsionskräfte zwischen den Molekülen von Flüssigkeiten oder Gasen bewirkte Reibungskräfte. Durch Reibung geht kinetische Energie der Flüssigkeit verloren, was sich in einer Erwärmung äußert.

1. Laminare Strömung,

eine Strömung, bei der einzelne Flüssigkeitsschichten endlicher Dicke mit verschiedenen Geschwindigkeiten übereinander hinweg gleiten, ohne sich stark zu vermischen, wie z. B. bei einer Strömung zwischen zwei gegeneinander bewegten Platten (**Abb. 6.49**).

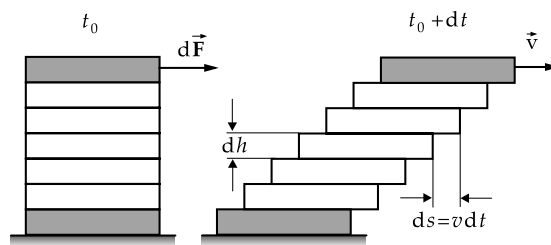


Abbildung 6.49: Flüssigkeitsschichten bei laminarer Strömung zwischen zwei gegeneinander bewegten Platten

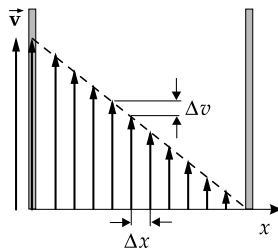


Abbildung 6.50: Geschwindigkeitsprofil bei laminarer Strömung zwischen zwei gegeneinander bewegten Platten

Die Flüssigkeit in dem gesamten so betrachteten Volumen bewegt sich in die gleiche Richtung, die einzelnen Schichten bewegen sich jedoch mit unterschiedlicher Geschwindigkeit. Beim Aufeinandergleiten entstehen

so Reibungskräfte, die zu einer gleichmäßigen Verringerung der Geschwindigkeit quer zum Strömungsprofil führen (**Abb. 6.50**). Gegensatz: **turbulente Strömung**.

Geschwindigkeitsgradient, dv/dx , der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten zweier benachbarter Schichten, bezogen auf die Dicke einer Schicht. Trägt man die Geschwindigkeit der Schicht gegen ihre Position auf, so erhält man ein **Geschwindigkeitsprofil** $v(x)$, dessen erste Ableitung dv/dx den Geschwindigkeitsgradienten angibt.

2. Newtonsches Reibungsgesetz,

beschreibt die Stärke der Reibungskraft zwischen den benachbarten Schichten einer laminaren Strömung. Die Kraft, die auf eine solche Schicht wirkt, ist proportional zur Fläche der Schicht und zum Geschwindigkeitsgradienten zu den benachbarten Schichten:

Newtonsches Reibungsgesetz			MLT^{-2}
	Symbol	Einheit	Benennung
$F_R = \eta A \frac{dv}{dx}$	F_R	N	Reibungskraft
	η	$Pa \cdot s = N \cdot s/m^2$	dynamische Viskosität
	A	m^2	Fläche der Schicht
	dv/dx	$1/s$	Geschwindigkeitsgradient

Die Proportionalitätskonstante η heißt **dynamische Viskosität** oder **Zähigkeit**. Sie hat die Einheit **Pascalsekunde** ($Pa \cdot s$). Je größer die Viskosität einer Flüssigkeit, desto mehr Kraft ist erforderlich, um die Schichten gegeneinander zu bewegen. Typische Größenordnung für η ist $10^{-5} Pa \cdot s$ bei Gasen, $10^{-3} Pa \cdot s$ bei Wasser und zwischen 0.1 und 0.01 $Pa \cdot s$ (je nach Temperatur) bei Schmierölen.

M Direkt äußert sich die Viskosität beim Herausziehen einer Platte aus einem engen Gefäß. Ist der Abstand zwischen Platte und Gefäßwand hinreichend klein, so macht sich die Viskosität als bremsende Kraft bemerkbar.

Keine SI-Einheit: Poise (nach dem Physiker Poiseuille)

$$1 \text{ Poise} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

3. Fluidität und kinematische Viskosität

Fluidität, ϕ , der Kehrwert der dynamischen Viskosität:

$$\phi = \frac{1}{\eta}, \quad [\phi] = \frac{m^2}{Ns}.$$

Kinematische Viskosität, ν , das Verhältnis von dynamischer Viskosität η zur Dichte ρ der Flüssigkeit:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad [\nu] = \frac{m^2}{s}.$$

Nicht mehr zugelassene Einheit:

$$1 \text{ Stokes} = 1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Typische Größenordnungen der kinematischen Viskosität sind $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ bei Wasser, $10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$ bei Luft und von 1 bis mehrere Hundert m^2/s bei Motorenölen.

Während die dynamische Viskosität die Kraft angibt, die auf eine Flüssigkeitsschicht wirkt, berücksichtigt die kinematische Viskosität die Dichte der Flüssigkeit und damit die Masse $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$ der Flüssigkeitsschicht. Die kinematische Viskosität gibt die wirkende Beschleunigung an:

$$a = \frac{F_R}{\Delta m} = \frac{F_R}{\rho A \Delta x} = \nu \frac{\Delta v}{(\Delta x)^2},$$

(a Beschleunigung, Δm Masse der Schicht, F_R Reibungskraft, A Fläche, Δx Dicke der Schicht, ν kinematische Viskosität, Δv Geschwindigkeitsunterschied).

- Die Viskosität ist eine Materialkonstante und stark von Temperatur und Druck abhängig. Die Abhängigkeit von der Temperatur wird näherungsweise durch
- $$\eta = A e^{b/T}$$
- mit Materialkonstanten A und b beschrieben; sie nimmt also bei steigender Temperatur ab. Besonders wichtig ist die Viskosität und ihre Veränderung bei Schmiermitteln.
Die dynamische Viskosität von Gasen ist sehr viel geringer als die von Flüssigkeiten (Luft $1.7 \cdot 10^{-5}$ Pa · s, Wasser $1.8 \cdot 10^{-3}$ Pa · s bei 0 °C).
Die Viskosität von Lösungen und Fluidmischungen ist stark von der Konzentration abhängig.
- **Nichtnewtonsche Substanzen.** Stoffe, für die das Newtonsche Reibungsgesetz nicht gilt und/oder deren Verformung nicht plastisch ist. Dazu gehören insbesondere polymere Stoffe (**Flüssigkunststoffe**) und **Dispersionen** (Flüssigkeiten, in denen feste Stoffe oder andere Flüssigkeiten als kleine Kügelchen aufgeschwemmt sind; je nach deren Größe auch als **Suspension** oder **Kolloid** bezeichnet).

6.3.3.2 Navier-Stokes-Gleichung

1. Bewegungsgleichungen der realen Strömung

Die Kontinuitätsgleichung gilt auch für reale Strömungen. Die Euler-Gleichung wird zur **Navier-Stokes-Gleichung**:

$$\rho \cdot \left((\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \text{grad } p + \eta \cdot \Delta \vec{v}.$$

Auf der linken Seite steht die substantielle Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes. Die rechte Seite enthält neben der äußeren Kraft pro Volumeneinheit \vec{F} und der Druckkraft pro Volumeneinheit $-\text{grad } p$ einen weiteren Kraftterm

$$\eta \cdot \Delta \vec{v} = \eta \cdot \left(\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2} \right).$$

Er hängt von der Krümmung der Geschwindigkeitsverteilung ab und drückt die Reibungskraft aus. Δ bezeichnet den Laplace-Operator.

Die Navier-Stokes-Gleichung ist die Grundgleichung der Hydrodynamik viskoser Flüssigkeiten. Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung kann sie alle Strömungen inkompressibler Flüssigkeiten, insbesondere auch turbulente Strömungen, beschreiben. Zu ihrer Lösung existieren wirkungsvolle numerische Algorithmen.

2. Spezialfälle realer Strömung

Man unterscheidet folgende Spezialfälle:

- Strömungen mit vernachlässigbarer Reibung: $\eta \approx 0$. Die Navier-Stokes-Gleichung reduziert sich dann auf die Euler-Gleichung (s. S. 668).
- Stationäre Strömungen. Die Zeitableitungen verschwinden.
- Schleichende Strömungen bei sehr großer Viskosität: $\eta \rightarrow \infty$. Die linke Seite der Navier-Stokes-Gleichungen kann vernachlässigt werden; die Strömung ist bestimmt durch das Gleichgewicht zwischen Druckgradienten und Reibung.
- Wirbelströmungen bei Turbulenzen. Anstatt die Gleichungen direkt zu lösen, drückt man die Änderung der Wirbelstärke in einem Volumenelement durch die Energiedissipation aufgrund von Reibung aus. Dadurch lassen sich turbulente Strömungen effizient beschreiben.

6.3.3.3 Laminare Strömung in einem Rohr

1. Modellierung der laminaren Strömung im Rohr

Die laminare Strömung in einem zylindrischen Rohr mit dem Innenradius R kann aus vielen Hohlzylindern der Dicke Δr , in denen sich die Flüssigkeit mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, zusammengesetzt gedacht werden. Der äußerste Hohlzylinder haftet an der Wand und ist in Ruhe. Die Geschwindigkeit der anderen Hohlzylinder ergibt sich aus dem Gleichgewicht der Reibungskräfte F_R , die nach dem Newtonschen

Reibungsgesetz beschrieben werden, und der Druckkraft F_p . Betrachtet man speziell einen Hohlzylinder des Radius r um die Mittellinie des Rohres der Länge l , so ist die wirkende Druckkraft (A : Querschnittsfläche)

$$F_p = pA = \pi pr^2.$$

Die dagegen wirkende Reibungskraft

$$F_R = -\eta A \frac{\Delta v}{\Delta r} = -\eta 2\pi r l \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

ist im Gleichgewicht der Druckkraft gleich. Man erhält so für den Geschwindigkeitsgradienten

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = -\frac{pr}{2\eta l}.$$

Der Geschwindigkeitsgradient nimmt mit steigendem Druck zu und mit steigender Zähigkeit sowie mit steigender Rohrlänge ab. Er wächst linear mit dem Abstand von der Rohrachse.

2. Ableitung des Hagen-Poiseuilleschen Gesetzes

Man geht nun vom Differenzenquotienten $\Delta v/\Delta r$ zum Differentialquotienten dv/dr über und separiert die so entstehende Differentialgleichung. Es gilt:

$$r dr = -\frac{2\eta l}{p} dv.$$

Integration dieser Differentialgleichung ergibt

$$r^2 = -\frac{4\eta l}{p} v + C,$$

mit einer Integrationskonstanten C ; letztere erhält man aus der Forderung, dass an der Wand ($r = R$) die Geschwindigkeit $v = 0$ sein soll, zu $C = R^2$. Umformen liefert das Gesetz für laminare Rohrströmung:

Hagen-Poiseuillesches Gesetz			LT^{-1}
	Symbol	Einheit	Benennung
$v(r) = \frac{p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$	$v(r)$	m/s	Geschwindigkeitsprofil
	r	m	Abstand von der Mittellinie
	p	Pa	Druck
	η	Pa s	dynamische Viskosität
	l	m	Länge des Rohres
	R	m	Innenradius des Rohres

Das Geschwindigkeitsprofil ist eine Parabel (**Abb. 6.51**). Die Flüssigkeit strömt am schnellsten in der Mitte des Rohres; die Geschwindigkeit ist proportional zum Druck und zum Quadrat des Radius des Rohres (und damit zur Querschnittsfläche) und umgekehrt proportional zur Zähigkeit und zur Länge des Rohres.

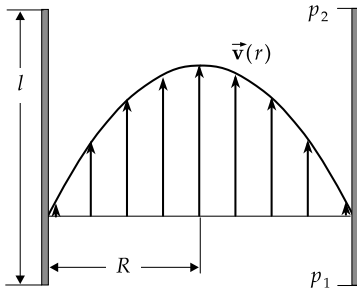


Abbildung 6.51: Hagen-Poiseuillesches Gesetz. Geschwindigkeitsprofil einer laminaren Rohrströmung

3. Eigenschaften der laminaren Strömung im Rohr

Der Druck p gibt den **Druckabfall** zwischen den beiden Enden des Rohres an. Bei gegebener Geschwindigkeit ist er also proportional zur Länge des Rohres. Betrachtet man die Geschwindigkeit $v_0 = v(0)$ in der Mitte des Rohres, so gilt folgende Beziehung zwischen Druckabfall und Strömungsgeschwindigkeit:

$$p = \frac{4\eta l}{R^2} v_0.$$

Der Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$, d. i. das Volumen ΔV der Flüssigkeit, das pro Zeiteinheit Δt das Rohr durchströmt, ergibt sich durch Integration der Geschwindigkeit über den Rohrquerschnitt zu:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi R^4}{8\eta l} p.$$

- Der Volumenstrom ist also durch Erhöhen des Rohrquerschnitts einfacher zu steigern als durch Erhöhen des Druckes.
- Bei gegebenem Volumenstrom ist der Druckabfall

$$p = \frac{8\eta l \Delta V}{\pi R^4 \Delta t}.$$

M Die Messung der Viskosität kann aufgrund dieser Beziehung zwischen Druck und Volumenstrom erfolgen. Dazu misst man die Zeit, die eine bestimmte Menge der Flüssigkeit benötigt, um bei konstanter Höhe der Flüssigkeitssäule durch die Öffnung eines Trichters zu fließen. Der wirkende Druck ergibt sich aus der Dichte der Flüssigkeit und der Höhe der Flüssigkeitssäule über dem Trichter.

6.3.3.4 Umströmung einer Kugel

Eine analoge Betrachtung ergibt die Kraft, die bei laminarer Umströmung auf eine Kugel in der Flüssigkeit wirkt. Es gilt:

Stokessches Reibungsgesetz			MLT ⁻²
	Symbol	Einheit	Benennung
$F_R = 6\pi\eta r v$	F_R	N	Reibungskraft
	η	Pa s	dynamische Viskosität
	r	m	Radius der Kugel
	v	m/s	Geschwindigkeit der Strömung

Die Reibungskraft ist also proportional zum Durchmesser der Kugel, zur Geschwindigkeit der Strömung und zur dynamischen Viskosität der Flüssigkeit.

M **Höppler-Kugelfallviskosimeter**, zur Messung der dynamischen Viskosität η aufgrund des Stokesschen Gesetzes durch die Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit v einer Kugel des Radius r . Letztere ist gegeben aus dem Gleichgewicht zwischen der Reibungskraft F_R und der um die Auftriebskraft F_A verminderten Gewichtskraft F_G :

$$F_R = 6\pi\eta r v = F_G - F_A = \frac{4}{3}\pi r^3 g(\rho_K - \rho_{Fl}),$$

(ρ_K Dichte der Kugel, ρ_{Fl} Dichte der Flüssigkeit). Die Sinkgeschwindigkeit ist damit

$$v = \frac{2gr^2(\rho_K - \rho_{Fl})}{9\eta},$$

und für die dynamische Viskosität ergibt sich

$$\eta = \frac{2gr^2(\rho_K - \rho_{Fl})}{9v}.$$

6.3.3.5 Bernoulli-Gleichung

Für den Fall einer realen Strömung mit Reibung ist das Bernoullische Gesetz zu modifizieren:

▲ Gesetz von Bernoulli:

Die Summen aus statischem und dynamischem Druck, gemessen an zwei verschiedenen Stellen eines Rohres, unterscheiden sich um den Betrag des Druckabfalls, berechnet nach dem Hagen-Poiseuille'schen Gesetz:

$$(p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1) - (p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2) = \Delta p,$$

wobei p_1, p_2 der Druck, v_1, v_2 die Geschwindigkeit der Flüssigkeit und h_1, h_2 die Höhe an den beiden Messpunkten sind und Δp den Druckabfall bezeichnet. Letzterer ist positiv zu zählen, wenn der erste Messpunkt stromaufwärts vom zweiten liegt.

Verlusthöhe, h_v , jene Höhe, um die der Zufluss des Rohres angehoben werden muss, um die Reibung auszugleichen:

$$h_v = \frac{\Delta p}{\rho g}.$$

6.3.4 Turbulente Strömungen

1. Charakterisierung turbulenter Strömung

Turbulente Strömung, eine Strömung, die an einem festgehaltenen Raumpunkt durch ungeordnete Änderungen in Richtung und Geschwindigkeit gekennzeichnet ist. Sie ist nicht mehr stationär. Misst man jedoch über eine Zeitspanne, die viel größer ist als eine typische Zeitspanne für die turbulenten Änderungen, so erhält man eine mittlere Geschwindigkeitsverteilung. Ist letztere von der Zeit unabhängig, so behandelt man die turbulente Strömung als stationär und versucht die Effekte der Turbulenzen durch entsprechende Reibungskoeffizienten einzubeziehen.

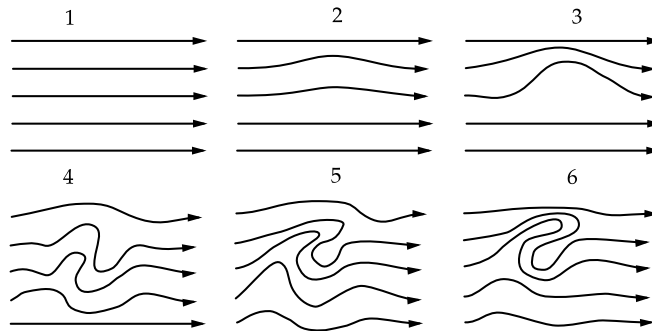


Abbildung 6.52: Übergang von laminarer zu turbulenter Strömung. Wirbelentstehung aus einer kleinen Störung

2. Wirbelbildung,

tritt aufgrund der Reibung beim **Ablösen von Flüssigkeitsschichten** auf. Beim Umströmen einer Kugel durch eine ideale Flüssigkeit ist der Druck dort am größten, wo die Oberfläche senkrecht zur Strömung steht („vorn“ und „hinten“), weil dort die Geschwindigkeit $v = 0$ ist, während der Druck dort am kleinsten und die Geschwindigkeit am größten ist, wo die Kugeloberfläche parallel zur Strömung ist („oben“ und „unten“). Flüssigkeitsteilchen, die an der Kugel vorbeiströmen, werden so zunächst abgebremst (Staudruck), dann wieder beschleunigt (Bernoulli-Prinzip) und zur Eingliederung in die normale Strömung wieder abgebremst.

Durch die Reibungskräfte erhöht sich nun die letztere Abbremsung der Teilchen, so dass die Teilchen noch vor dem Erreichen der Mittelachse zur Ruhe kommen. Dadurch entstehen **Wirbel**, die aufgrund der Erhaltung des Drehimpulses paarweise auftreten.

3. Reynoldszahl,

eine dimensionslose Größe, die bestimmt, wie stark die Wirbelbildung stattfindet. Bei höheren Reynoldszahlen tritt Wirbelbildung spontan aus kleinen Störungen auf (**Abb. 6.52**). Turbulente Strömungen sind ein Beispiel für nichtlineare Dynamik (s. S. 197) eines ausgedehnten Systems.

Durch die Reibung der Flüssigkeitsteilchen in einem Wirbel wird weitere Energie verbraucht, die der Strömung der Flüssigkeit durch eine zusätzliche Reibungskraft entzogen wird.

▲ Die Reibungskraft bei turbulenter Strömung ist größer als die Reibungskraft bei laminarer Strömung.

6.3.4.1 Widerstandsbeiwert

1. Widerstandskraft

Auf einen Körper in einer turbulenten Strömung wirken zwei Widerstandskräfte (**Abb. 6.53**):

- **Reibungswiderstandskraft**, F_R , die aufgrund des Reibungsgesetzes wirkende Kraft zwischen Flüssigkeit und Körperoberfläche im Bereich der laminaren Strömung,
- **Druckwiderstandskraft**, F_D , der bei turbulenter Strömung zusätzlich wirkende Druckunterschied vor und hinter dem umströmten Körper. Dieser Druckunterschied entsteht durch die Wirbelbildung auf der Rückseite des Körpers. In den Wirbeln bewegt sich die Flüssigkeit sehr schnell, so dass aufgrund der Bernoulli-Gleichung der statische Druck dort geringer ist als auf der Vorderseite.

Beide Anteile zusammen ergeben die Widerstandskraft, \vec{F}_W ,

$$\vec{F}_W = \vec{F}_R + \vec{F}_D.$$

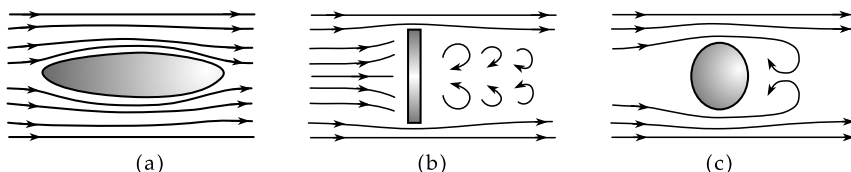


Abbildung 6.53: Widerstände bei der Umströmung von Körpern. (a): Reibungswiderstand bei laminarer Strömung, (b): Druckwiderstand bei turbulenter Umströmung einer Platte, (c): Reibungs- und Druckwiderstand bei der Umströmung einer Kugel

2. Widerstandsbeiwert,

charakterisiert die Größe der Widerstandskraft. Es gilt:

Widerstandskraft			MLT^{-2}
$F_W = c_w \frac{\rho}{2} A v^2$	Symbol	Einheit	Benennung
	\vec{F}_W	N	Widerstandskraft
	c_w	1	Widerstandsbeiwert
	ρ	kg/m ³	Dichte der Flüssigkeit
	A	m ²	Querschnittsfläche des Körpers
	v	m/s	Strömungsgeschwindigkeit

Der Widerstandsbeiwert ist eine dimensionslose Größe. Er hängt stark von der Form des Körpers ab.

- ▲ Die Widerstandskraft ist proportional zur Querschnittsfläche eines Körpers und zum Quadrat der Geschwindigkeit.
- Typische Werte für den Widerstandsbeiwert liegen zwischen 0.055 (Stromlinienkörper) und 1.1 bis 1.3 (Platte).
- M** Der Widerstandsbeiwert wird durch direkte Messung der Widerstandskraft im Windkanal bestimmt. Aufgrund der Ähnlichkeitsgesetze ist es möglich, an einem verkleinerten Modell zu messen.

3. Stromlinienkörper,

ein tropfenähnlicher Körper, der den geringstmöglichen Widerstandsbeiwert aufweist. Der Druckabfall längs eines Stromlinienkörpers erfolgt so langsam, dass keine Wirbelbildung auftritt. Dazu dient insbesondere das lang auslaufende Heck.

- Die Widerstandskraft eines Körpers in der Atmosphäre beruht überwiegend auf der Wirbelbildung. Man versucht daher, sie durch Schlitze oder Führungsbleche soweit wie möglich zu unterbinden und die Strömung laminar zu halten.

Die Leistung P , die zur Bewegung eines Körpers in einer turbulenten Strömung aufgebracht werden muss, ergibt sich wegen $P = F_W v$ zu

$$P = c_w \frac{\rho}{2} A v^3.$$

- Bei einer Verdopplung der Geschwindigkeit muss die Leistung auf das Achtfache erhöht werden.

4. Winddruck

auf Bauwerke, entsteht durch Druck oder Sog (auf der windabgewandten Seite, Abheben von Dächern). **Beaufort-Grade** (s. Windstärken, **Tab. 34.0/6**).

- Der Luftdruck im Innern eines Hauses ist bei Wind größer als über dem Dach (s. S. 179).
- ▲ Der Winddruck p_w nimmt mit dem Quadrat der Windgeschwindigkeit zu:

$$p_w = c_p v^2, \quad [p_w] = \text{Pa} = \text{Pascal}.$$

Der Proportionalitätsfaktor hat die Dimension kg/m^3 . Typische Zahlenwerte liegen bei $c_p = 1.0 \text{ kg/m}^3$.

Typische Windstaudrücke auf Bauwerke		
Höhe über Boden	Windgeschwindigkeit/(m/s)	Staudruck/(kPa)
bis 8 m	30	0.5
8 bis 20 m	36	0.8
20 bis 100 m	42	1.1
mehr als 100 m	46	1.3

6.3.5 Ähnlichkeitsgesetze

1. Ähnlichkeitsarten

Ähnlichkeitsgesetze, stellen eine Beziehung zwischen den strömungsmechanischen Eigenschaften von verkleinerten Modellen zu denen der Originale her. Das Modell muss die beiden folgenden Ähnlichkeitsbedingungen erfüllen:

- **Geometrische Ähnlichkeit:** Das Modell muss hinsichtlich der geometrischen Abmessungen und der Oberflächenbeschaffenheit eine maßstabgerechte verkleinerte Darstellung des Originals abgeben.
- **Hydrodynamische Ähnlichkeit:** Dichte, Viskosität, Geschwindigkeit der Flüssigkeit und Widerstandskraft im Modellversuch müssen in einem bestimmten Verhältnis zu denen der Originalsituation stehen.

2. Reynoldszahl,

Re, beschreibt die hydrodynamische Ähnlichkeit.

Reynoldszahl			1
$\text{Re} = \frac{L\rho v}{\eta} = \frac{Lv}{\nu}$	Symbol	Einheit	Benennung
	Re	1	Reynoldszahl
	L	m	charakteristische Länge
	ρ	kg/m ³	Dichte der Flüssigkeit
	v	m/s	Strömungsgeschwindigkeit
	η	Pa s	dynamische Viskosität
ν	m ² /s	kinematische Viskosität	

Die Reynoldszahl ist eine dimensionslose Größe. L bezeichnet eine typische Ausdehnung in der betrachteten Geometrie, z. B. den Durchmesser einer Kugel oder die Seitenlänge eines Würfels. Die Reynoldszahl ist ein Maß für das Verhältnis der Trägheitskraft eines Flüssigkeitsvolumens zur Widerstandskraft. Das Verhalten der Strömung wird durch das Wechselspiel dieser beiden Größen bestimmt. Die Reynoldszahl ist temperaturabhängig.

▲ **Ähnlichkeitsgesetz:**

Die Widerstandswerte zweier geometrisch ähnlicher Körper stimmen überein, wenn die Reynoldszahlen in beiden Fällen übereinstimmen.

► Dieses Gesetz ist die Grundlage für die Messung von Widerstandsbeiwerten an Modellen in **Windkanälen**.

▲ Um die hydrodynamische Ähnlichkeit zu erhalten, muss bei einer Verkleinerung des Modells entweder die Geschwindigkeit proportional vergrößert oder die kinematische Viskosität entsprechend verringert werden. Letzteres wiederum kann durch Verringerung der dynamischen Viskosität oder durch Erhöhung der Dichte erfolgen.

3. Kritische Reynoldszahl,

Re_{krit} , gibt ein Kriterium für den Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung an. Überschreitet die Reynoldszahl einer Strömung die kritische Reynoldszahl, $\text{Re} > \text{Re}_{\text{krit}}$, so wird die Strömung turbulent (**Abb. 6.54**).

► Die kritische Reynoldszahl hängt stark von der Geometrie der Strömung ab. In einer glatten Röhre liegt sie zwischen 1000 und 2500. Das Umschlagen von laminarer zu turbulenter Strömung erfolgt nicht sprunghaft und hängt auch von der Anwesenheit von Störungen im Fluss ab.

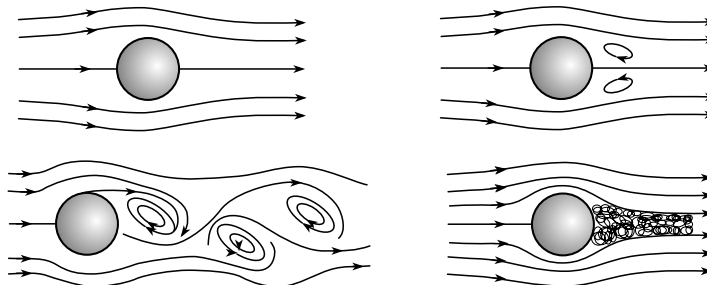


Abbildung 6.54: Wirbelentstehung und Übergang zur turbulenten Strömung bei zunehmender Reynoldszahl

Insbesondere treten Turbulenzen erst ab einer gewissen Mindestgeschwindigkeit auf. Aus diesem Grund entstehen die Wirbel beim Umströmen eines Körpers auf dessen Rückseite, wo die Flüssigkeit wieder zusammenfließt und dabei radial und axial beschleunigt wird.

Laminare Grenzschicht, bildet sich beim Umströmen eines Körpers in einer realen Flüssigkeit. In ihr ist aufgrund der Reibung an der Oberfläche des Körpers die Strömungsgeschwindigkeit klein. In diesem Fall liegt die Reynoldszahl unterhalb der kritischen Reynoldszahl. Erst außerhalb dieser Grenzschicht setzt die Wirbelbildung ein (**Abb. 6.55**).

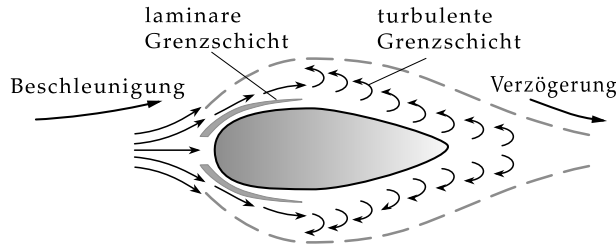


Abbildung 6.55: Laminare und turbulente Grenzschicht

Froudezahl, Fr , eine Ähnlichkeitszahl, die die Wirkung der Erdanziehung einbezieht: Dynamische Ähnlichkeit verlangt gleiches Verhältnis von Trägheitskraft und Schwerkraft. Die Froudezahl ist für die Beschreibung von Oberflächenwellen von Bedeutung (z. B. beim Umströmen von Schiffskörpern):

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{Lg}},$$

(v Strömungsgeschwindigkeit, L charakteristische Länge, g Fallbeschleunigung). Idealerweise müssten bei Modelluntersuchungen sowohl die Froudezahlen als auch die Reynoldszahlen für Modell und Original übereinstimmen. Dies ist aber aufgrund der verschiedenen Abhängigkeiten von L nicht möglich. Bei Untersuchungen von Strömungen in Rohren usw., wo die Erdanziehung nur einen geringen Einfluss auf die innere Bewegung der Flüssigkeit hat, wird auf die Reynoldszahl geachtet, bei Strömungsuntersuchungen von Schiffsrümpfen, wo der Einfluss der Oberflächenwellen größer ist, oder bei Ausfluss- und Strahlproblemen, dagegen auf die Froudezahl.

6.3.5.1 Rohrreibung

1. Rohrreibungsgesetz,

die Proportionalität zwischen der Verlusthöhe (s. S. 190) und der Länge l des Rohres:

$$h_V = \lambda \frac{l v^2}{d 2g},$$

(d Durchmesser, l Länge des Rohres, v Geschwindigkeit der Strömung, g Fallbeschleunigung). Die Proportionalitätskonstante λ heißt **Rohrreibungszahl**.

Bei glatten Rohren kann die Rohrreibungszahl durch empirische Formeln, die für verschiedene Bereiche der Reynoldszahl gelten, bestimmt werden:

- **laminare Strömung:** $Re < Re_{krit}$,

$$\lambda = \frac{64}{Re}.$$
- **Blasius-Formel:** $Re_{krit} \leq Re \leq 10^5$,

$$\lambda = \frac{0.3164}{\sqrt[4]{Re}}$$
- **Nikuradse-Formel:** $10^5 \leq Re \leq 10^8$,

$$\lambda = 0.0032 + \frac{0.221}{Re^{0.237}}$$

- **Kirschmer-Prandtl-Kármán-Formel:** $Re > Re_{krit}$,

$$\frac{1}{\lambda} = \left(2 \cdot \log \frac{\sqrt{\lambda} \cdot Re}{2.51} \right)^2.$$

Die Gleichung ist eine Bestimmungsgleichung, die numerisch oder graphisch gelöst werden muss.

2. Rauheit

Die Rohrreibungszahl bei Rohren mit rauher Oberfläche hängt von der **mittleren Rauheitshöhe** k ab. Sie gibt die typische Größe von Erhebungen auf der Oberfläche an:

Rohrart	Rauheitshöhe k
Kunststoffrohre	≈ 0.007 mm
Stahlrohre	0.05 mm
angerostete Stahlrohre	0.15 mm bis 4 mm
Gusseisen-Rohre	0.1 mm bis 0.6 mm
Betonkanäle	1 mm bis 3 mm
gemauerte Kanäle	3 mm bis 5 mm

- Ob ein glattes oder ein rauhes Rohr vorliegt, hängt von der **relativen Rauheit**

$$k_{rel} = \frac{k}{d}$$

(d Rohrdurchmesser) des Rohrs und der Reynoldszahl ab. Für

$$Re \cdot \frac{k}{d} > 1300$$

liegt ein rauhes Rohr vor, bei Werten bis zu 65 ein glattes Rohr, dazwischen ein Mischbereich.

6.3.6 Strömungen mit Dichteänderungen

Strömungen mit Dichteänderungen, treten in Gasen auf; bei Flüssigkeiten ist die Dichteänderung fast immer vernachlässigbar. Die vorherrschenden Phänomene dabei sind die Ausbreitung kleiner Dichteänderungen (Schall) und großer Dichteänderungen (Stoßwellen). Weiter müssen bei Strömungen mit hoher Geschwindigkeit (Düsen) und bei Strömungen in der Atmosphäre (Meteorologie) Dichteänderungen beachtet werden.

Die Bewegungsgleichungen für Strömungen kompressibler Medien nutzen die Zustandsgleichung des Mediums, die Druck, Dichte und Temperatur verbindet, aus.

1. Schall,

die Ausbreitung kleiner Druckstörungen. Sie erfolgt durch Schallwellen (s. S. 287), die sich mit einer konstanten, von Medium, Temperatur und Druck abhängigen **Schallgeschwindigkeit** c ausbreiten. Beim idealen Gas gilt für die Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\kappa RT/M},$$

(κ Isentropenkoeffizient des Gases, R universelle Gaskonstante, T Temperatur, M Molmasse).

- ▲ In einem ruhenden, homogenen Gas erfolgt die Ausbreitung von Schall in Form einer von der Schallquelle ausgehenden Kugelwelle, die sich nach allen Seiten gleichmäßig (isotrop) mit Schallgeschwindigkeit ausbreitet.

Bewegt sich die Schallquelle relativ zum Beobachter, so überlagert sich die Bewegung der Schallquelle mit der Bewegung der Schallwellen.

2. Machscher Kegel,

Schallausbreitung bei einer Schallquelle, die sich mit einer Geschwindigkeit v_q höher als die Schallgeschwindigkeit c bewegt. Die Schallquelle läuft den ausgesandten Schallwellen davon, $v_q t > ct$. Die zu verschiedenen Zeitpunkten emittierten Kugelwellen überlagern sich so, dass sich eine kegelförmige

Wellenfront ausbildet mit einem Maximum der Druckerhöhung auf dem Kegelmantel (**Abb. 6.56**). Ein Beobachter, den diese Wellenfront passiert, registriert einen Überschallknall.

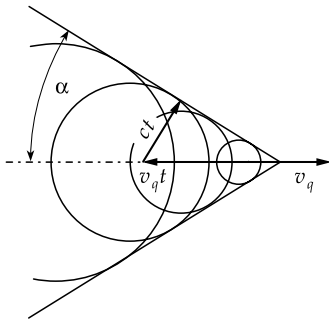


Abbildung 6.56: Machscher Kegel.
Eine Schallquelle bewegt sich mit
Überschallgeschwindigkeit $v_q > c$. α :
Machscher Winkel

Machscher Winkel, α , halber Öffnungswinkel des Machschen Kegels:

$$\sin \alpha = \frac{c}{v_q} = \frac{1}{M},$$

(v_q Geschwindigkeit der Schallquelle, c Schallgeschwindigkeit, M Machzahl). Die Machzahl M gibt die Geschwindigkeit der Schallquelle in Einheiten der Schallgeschwindigkeit an.

3. Stoßwelle,

(**Verdichtungsstoß**), große, un stetige Druckänderung, die sich mit **Überschallgeschwindigkeit** ausbreitet. Der Drucksprung in einer solchen Welle geschieht auf Abständen von wenigen freien Molekülweglängen (im Mikrometerbereich). Stetige Wellen großer Amplitude verwandeln sich in Stoßwellen, da sich der Schall in Bereichen hohen Drucks (hoher Temperatur) schneller ausbreitet als in Bereichen niedrigen Drucks und so der stetige Anstieg am Anfang der Welle vom Kamm der Welle eingeholt wird.

- Stoßwellen treten bei Detonationen auf.