Kleine Formelsammlung Technische Mechanik

von
Peter Will, Bernd Lämmel

1. Auflage

Hanser München 2007

Verlag C.H. Beck im Internet:
www.beck.de
ISBN 978 3 446 41137 1

HANSER

Peter Will, Bernd Lämmel

Kleine Formelsammlung Technische Mechanik

ISBN-10: 3-446-41137-2
ISBN-13: 978-3-446-41137-1

Leseprobe

3 Dynamik

3.1 Schwerpunkt-, Impuls- und Momentensatz

Die Bewegungsgleichungen eines starren Körpers ergeben sich aus dem Schwerpunkt- oder Impulssatz sowie dem Momenten- oder Drallsatz unter Beachtung kinematischer Zwangsführungen. Erstere charakterisieren die translatorische Bewegung des Systemschwerpunktes, während der Momenten- bzw. Drallsatz die Rotation des Körpers bewertet.

Schwerpunktsatz

$$m\frac{d^2}{dt^2}x_S = F_x \qquad m\frac{d^2}{dt^2}y_S = F_y \qquad m\frac{d^2}{dt^2}z_S = F_z$$

Der Schwerpunkt eines Massenpunktsystems bzw. eines Bauteils bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse m des Körpers in ihm vereinigt wäre und die Resultierende (F_x, F_y, F_z) aller äußeren Kräfte an ihm angreift.

Impulssatz

$$\frac{d}{dt}\vec{p}_S = \vec{F}$$

Impuls

$$\vec{p}_S = m\vec{v}_S$$

m Masse des starren Körpers
$\vec{v}_S$ Geschwindigkeitsvektor des Schwerpunktes

Drallsatz, Momentensatz

Rotation eines starren Körpers mit raumfestem, körpereigenen Bezugspunkt A

Die zeitliche Änderung des Drehimpulsvektors (Dralls) ist gleich dem resultierenden Momentenvektor der äußeren Kräfte.

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_A = \vec{M}_A$$

$\vec{M}_A$ Vektor des äußeren Moments bezüglich A

Rotation eines starren Körpers mit bewegtem Schwerpunkt S als Bezugspunkt

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_S = \vec{M}_S$$

$\vec{M}_S$	Vektor des äußeren Moments bezüglich S

<u>Achtung:</u> Schwerpunkt- bzw. Momentensatz starrer Körper gelten auch für mehrteilige, verbundene Systeme. Die Bewegungsgleichungen für jedes Teilelement des Gesamtsystems lassen sich aus den genannten Sätzen unter Berücksichtigung von Schnittkräften bzw. Schnittmomenten sowie kinematischen Beziehungen für die gekoppelte Bewegung zwischen den einzelnen Bauteilen ableiten.

Drallsatz (ebene Bewegung)

$$M_A = \Theta_A \ddot{\varphi} + m\left(\ddot{y}_A x_{AS} - \ddot{x}_A y_{AS}\right)$$

M_A	äußeres Moment
Θ_A	Massenträgheitsmoment des starren Körpers bezüglich des körpereigenen Referenzpunktes A
$\ddot{\varphi}$	Winkelbeschleunigung
$(\ddot{x}_A, \ddot{y}_A)$	Beschleunigung des Bezugspunktes A
(x_{AS}, y_{AS})	Differenzkoordinaten zwischen Bezugspunkt A und Schwerpunkt S

Drehimpuls (ebene Bewegung)

Ebene Rotation eines starren Körpers um raumfesten, körpereigenen Bezugspunkt A

$$L_A = \Theta_A \omega$$

Θ_A	Massenträgheitsmoment des starren Körpers zum raumfesten, körpereigenen Referenzpunkt A
ω	Winkelgeschwindigkeit der Rotation um A

Ebene Rotation eines starren Körpers um den bewegten Schwerpunkt S

$$L_S = \Theta_S \omega$$

Θ_S	Massenträgheitsmoment des starren Körpers bezüglich des Schwerpunktes S
ω	Winkelgeschwindigkeit der Rotation um S

Drehimpuls Referenzpunktverschiebung

Formulierung 2d

$$L_B = L_A + m\left(x_{BA}\dot{y}_S - y_{BA}\dot{x}_S\right)$$

m	Masse des Bauteils
$\left(x_{BA}, y_{BA}\right)$	Differenzkoordinaten vom Bezugspunkt B zu A
$\left(\dot{x}_S, \dot{y}_S\right)$	Geschwindigkeitskoordinaten des bewegten Schwerpunkts

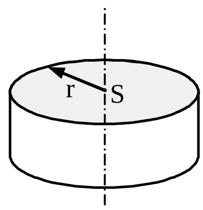
Massenträgheitsmoment bezüglich des Schwerpunktes

$$\Theta_s = \iiint_V \rho r^2 dV$$

ρ	Dichte des Materials
r	Entfernung vom Schwerpunkt des Körpers
V	Volumen des Bauteils

Kreisscheibe

$$\Theta_s = \frac{mR^2}{2}$$



m	Masse der Kreisscheibe
R	Radius des Kreisquerschnitts

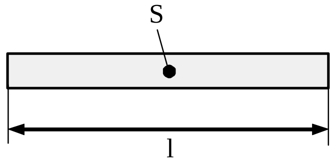
Kugel (Schwerpunktachse)

$$\Theta_s = \frac{2}{5} m R^2$$

m	Masse der Kugel
R	Radius der Kugel

Schlanker Stab

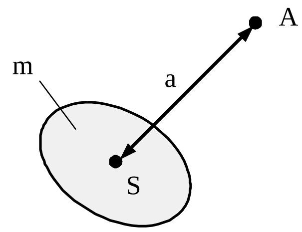
$$\Theta_S = \frac{m l^2}{12}$$



m	Masse des Stabes
l	Länge des schlanken Stabes

Satz von Steiner (2d)

$$\Theta_A = \Theta_S + m a^2$$



a	Abstand der parallelen Achsen A und S
m	Masse des Körpers

Trägheitsradius

$$i_A = \sqrt{\frac{\Theta_A}{m}}$$

Der Trägheitsradius ist die Entfernung eines als Punktmasse gedachten Ersatzkörpers von der Drehachse A, der das gleiche axiale Massenträgheitsmoment Θ_A hat wie ein originales, ausgedehntes Bauteil mit der Gesamtmasse m.

Reduzierte Masse

$$m_A = \frac{\Theta_A}{r^2}$$

Die reduzierte Masse ist die Masse eines im vorgegebenen Abstand r von der Drehachse A angebrachten punkt- oder ringförmigen Ersatzkörpers, der das gleiche axiale Massenträgheitsmoment Θ_A hat wie das originale Bauteil.

Drehimpuls (3d)

Rotation eines starren Körpers mit raumfestem, körpereigenen Bezugspunkt A

$$\vec{L}_A = \begin{bmatrix} \Theta_{Axx} & \Theta_{Axy} & \Theta_{Axz} \\ \Theta_{Axy} & \Theta_{Ayy} & \Theta_{Ayz} \\ \Theta_{Axz} & \Theta_{Ayz} & \Theta_{Azz} \end{bmatrix} \vec{\omega}$$

$\Theta_{Axx}, \Theta_{Ayy}, \Theta_{Azz}$	axiale Massenträgheitsmomente bezüglich A
$\Theta_{Axy}, \Theta_{Axz}, \Theta_{Ayz}$	Deviationsmomente bezüglich A
$\vec{\omega}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Körpers

Rotation eines starren Körpers mit bewegtem Schwerpunkt S als Bezugspunkt

$$\vec{L}_S = \begin{bmatrix} \Theta_{Sxx} & \Theta_{Sxy} & \Theta_{Sxz} \\ \Theta_{Sxy} & \Theta_{Syy} & \Theta_{Syz} \\ \Theta_{Sxz} & \Theta_{Syz} & \Theta_{Szz} \end{bmatrix} \vec{\omega}$$

$\Theta_{Sxx}, \Theta_{Syy}, \Theta_{Szz}$	axiale Massenträgheitsmomente bezüglich S
$\Theta_{Sxy}, \Theta_{Sxz}, \Theta_{Syz}$	Deviationsmomente bezüglich S
$\vec{\omega}$	Vektor der Winkelgeschwindigkeit des Körpers

Drehimpuls Referenzpunktverschiebung

Formulierung 3d

$$\vec{L}_B = \vec{L}_A + m\ \vec{r}_{BA} \times \vec{v}_S$$

m	Masse des Bauteils
$\vec{r}_{BA}$	Vektor vom Bezugspunkt B zum Bezugspunkt A
$\vec{v}_S$	Geschwindigkeitsvektor des bewegten Schwerpunkts

Axiale Massenträgheitsmomente

$$\Theta_{xx} = \iiint_V \left(y^2 + z^2\right)\rho dV \qquad \Theta_{yy} = \iiint_V \left(x^2 + z^2\right)\rho dV$$

$$\Theta_{zz} = \iiint_V \left(x^2 + y^2\right)\rho dV$$

ρ	Dichte
V	Volumen des Bauteils

Deviationsmomente, Zentrifugalmomente

$$\Theta_{xy} = \Theta_{yx} = -\iiint_V xy\rho dV \qquad \Theta_{yz} = \Theta_{zy} = -\iiint_V yz\rho dV$$

$$\Theta_{xz} = \Theta_{zx} = -\iiint_V xz\rho dV$$

ρ	Dichte
V	Volumen des Bauteils
x, y, z	Koordinaten der Volumenelemente dV des Körpers bezüglich des Referenzpunktes

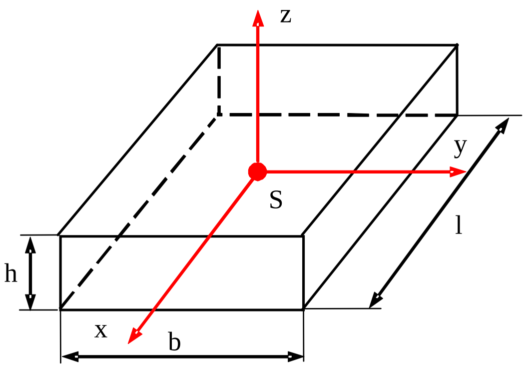
Der Wert von mindestens zwei Deviationsmomenten wird zu Null, wenn eine der Koordinatenachsen *x, y* oder *z* mit einer Symmetrieachse des starren Körpers zusammenfällt.

Homogener Quader

$$\Theta_{xx} = \frac{m}{12}\left(b^2 + h^2\right)$$

$$\Theta_{yy} = \frac{m}{12}\left(l^2 + h^2\right)$$

$$\Theta_{zz} = \frac{m}{12}\left(l^2 + b^2\right)$$

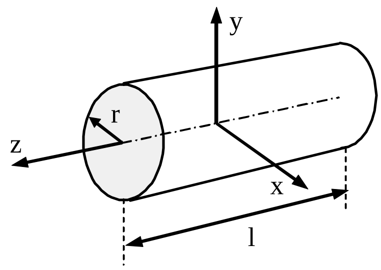


m	Masse des Quaders
l, b, h	Abmessungen des Quaders

Zylinder

$$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \frac{m}{12}\left(3r^2 + l^2\right)$$

$$\Theta_{zz} = \frac{m}{2}r^2$$

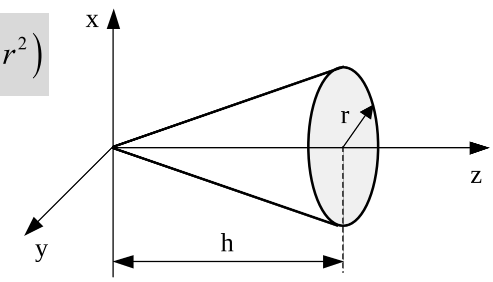


m	Masse des Zylinders
r, l	Abmessungen des Zylinders

Kreiskegel

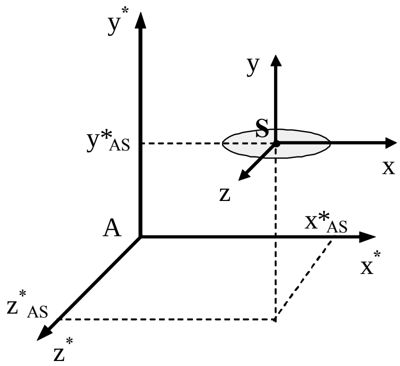
$$\Theta_{xx} = \Theta_{yy} = \frac{3}{20}m\left(4h^2 + r^2\right)$$

$$\Theta_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$$



m	Masse des Kreiskegels
h	Höhe des Kreiskegels
r	Radius der Grundfläche

Satz von Steiner (3d)



Axiale Momente

$$\Theta_{Axx} = \Theta_{Sxx} + m\left(y_{AS}^{*\,2} + z_{AS}^{*\,2}\right)$$

$$\Theta_{Ayy} = \Theta_{Syy} + m\left(z_{AS}^{*\,2} + x_{AS}^{*\,2}\right)$$

$$\Theta_{Azz} = \Theta_{Szz} + m\left(x_{AS}^{*\,2} + y_{AS}^{*\,2}\right)$$

$\Theta_{Sxx}, \Theta_{Syy}, \Theta_{Szz}$	axiale Momente zum Schwerpunkt *S*
m	Masse des Körpers
$\left(x_{AS}^*, y_{AS}^*, z_{AS}^*\right)$	Differenzkoordinaten zwischen Bezugspunkt *A* und Schwerpunkt *S*

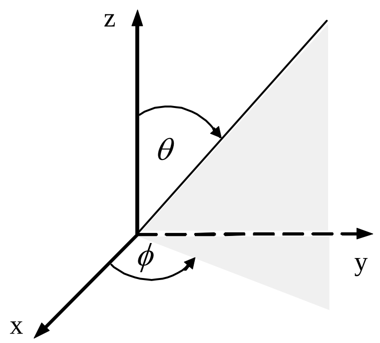
Deviationsmomente

$$\Theta_{Axy} = \Theta_{Sxy} - m\ x_{AS}^* y_{AS}^* \qquad \Theta_{Ayz} = \Theta_{Syz} - m\ y_{AS}^* z_{AS}^*$$

$$\Theta_{Azx} = \Theta_{Szx} - m\ z_{AS}^* x_{AS}^*$$

$\Theta_{Sxy}, \Theta_{Syz}, \Theta_{Szx}$	Deviationsmomente zum Schwerpunkt *S*
m	Masse des Körpers
$\left(x_{AS}^*, y_{AS}^*, z_{AS}^*\right)$	Differenzkoordinaten zwischen Bezugspunkt *A* und Schwerpunkt *S*

Axiales Massenträgheitsmoment für Achse in Raumrichtung (ϕ,θ)

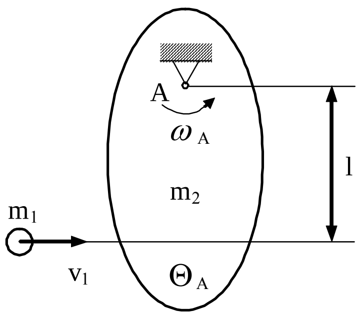


$$\Theta = \left(\Theta_{xx}\cos^2\phi + \Theta_{yy}\sin^2\phi + \Theta_{xy}\sin 2\phi\right)\sin^2\theta$$
$$+\Theta_{zz}\cos^2\theta + \left(\Theta_{yz}\sin\phi + \Theta_{zx}\cos\phi\right)\sin 2\theta$$

$\Theta_{xx}, \Theta_{yy}, \Theta_{zz}$	axiale Massenträgheitsmomente
$\Theta_{xy}, \Theta_{xz}, \Theta_{yz}$	Deviationsmomente
ϕ, θ	Raumwinkel

3.2 Stoßgesetze

Stoß einer Punktmasse gegen drehbar befestigten Körper



Geschwindigkeitsänderung Punktmasse

$$\Delta v_1 = \frac{(\omega_A l - v_1)(1+\varepsilon)}{\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_1 l^2}{\Theta_A}}$$

Änderung der Winkelgeschwindigkeit des Körpers

$$\Delta \omega_A = \frac{(v_1 - \omega_A l)(1+\varepsilon)}{l + \frac{\Theta_A}{m_2 l}}$$

m_1	stoßende Punktmasse
m_2	Masse des drehbar gelagerten Körpers
v_1	Geschwindigkeit der Punktmasse vor dem Stoß
l	Lot vom Drehpunkt A auf die Stoßrichtung
Θ_A	Massenträgheitsmoment des drehbar gelagerten Körpers bezüglich der Drehachse A
ω_A	Winkelgeschwindigkeit des drehbar gelagerten Körpers vor dem Stoß
ε	Stoßzahl

Stoßmittelpunkt (Trägheitsmittelpunkt)

Die dynamischen Lagerreaktionen eines drehbar gelagerten, starren Körpers verschwinden, wenn die Stoßnormale durch den Stoßmittelpunkt des starren Körpers verläuft und senkrecht zur Verbindungsgeraden zwischen dem Drehpunkt A und dem Schwerpunkt S des starren Körpers gerichtet ist. Der Stoßmittelpunkt liegt auf dieser Verbindungsgeraden in der Entfernung l vom Drehpunkt.

$$l = \frac{\Theta_A}{m_2 l_{AS}}$$

m_2	Masse des gestoßenen, drehbar gelagerten Körpers
l_{AS}	Entfernung des Schwerpunktes S vom Drehpunkt A
Θ_A	Massenträgheitsmoment des gestoßenen Körpers bezüglich A